集合と位相第一
講義ノート

東京工業大学 理学部
2011 年度前期

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

1　集合とその演算

1.1　集合

■集合　数学的対象の「集まり」を**集合** set という[*1].

■数の集合　次のものは集合である[*2]：

自然数全体の集まり $\boldsymbol{N}$・整数全体の集まり $\boldsymbol{Z}$・有理数全体の集まり $\boldsymbol{Q}$・実数全体の集まり $\boldsymbol{R}$.

■要素　集合を構成しているひとつひとつの対象をその集合の**要素・元** element, member，あるいは状況によっては**点** point とよぶことがある．集合 A に対して「x が A の要素である」「x が A の要素でない」ということをそれぞれ "$x \in A$", "$x \notin A$" と書く．たとえば $2 \in \boldsymbol{N}$, $0 \notin \boldsymbol{N}$,[*3] $\pi \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{N} \notin \boldsymbol{R}$ である．

■集合の記述　具体的に集合を記述するには，例えば

$$\{x \,|\, x \text{ は自然数かつ } x \text{ は } 2 \text{ で割り切れる }\} \tag{1.1}$$

などのように { 要素を代表する文字 | それが満たすべき条件 } と表すことが多い．とくに "x が自然数" であることが自然な前提であるときは (1.1) を

$$\{x \in \boldsymbol{N} \,|\, x \text{ は } 2 \text{ で割り切れる }\}$$

と表すこともある．文字 x に関する条件 $P(x)$ を用いて

$$A = \{x \,|\, P(x)\} \qquad \text{とするとき} \qquad \text{“}x \in A\text{” であることは “}P(x)\text{ が成り立つ” ことと同値}$$

である．

1.2　包含関係

■部分集合　集合 B のすべての要素が集合 A の要素であるとき B は A の**部分集合** subset であるといい "$B \subset A$" と表す[*4]．すなわち[*5]

$$\text{“}B \subset A\text{”} \qquad \equiv \qquad \text{“}x \in B \;\Rightarrow\; x \in A\text{”}.$$

とくに $B = \{x \,|\, P(x)\}$, $A = \{x \,|\, Q(x)\}$ と表されているとき，"$B \subset A$" であることは "任意の x に対して $P(x)$ が成り立つならば $Q(x)$ が成り立つ" こと[*6]と同値である．

2011 年 4 月 12 日

[*1] もちろんこのような曖昧な言明は集合の定義を与えていない．集合を公理によって与える議論 (20 世紀初頭にはじまった公理的集合論) は "素朴集合論" に現れるパラドクスを解消するが，講義の範囲を超えるのでここでは扱わない．

[*2] 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ を構成することができるが（時間があれば解説する）とりあえずこういう集合の存在を認めておこう．実数の構成は解析概論第一の授業で扱う（はず)．

[*3] 0 を自然数とする流儀もある．

[*4] 高等学校の多くの教科書では，このことを「$B \subsetneqq A$」と表しているようである．

[*5] "$\equiv$" は「同値である」と読む．

[*6] "$\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$" などと書く．

■空集合　要素をひとつも持たない集合を**空集合** empty set といい $\emptyset$ と書く．空集合は任意の集合の部分集合である．

■集合の相等　二つの集合 A, B が $A \subset B$ かつ $B \subset A$ を満たしているならば $x \in A$ であることと $x \in B$ であることは同値である．すなわち二つの集合は一致する：

$$\text{“}A = B\text{”} \qquad \equiv \qquad \text{“}A \subset B \text{ かつ } B \subset A\text{”}.$$

■真部分集合　さらに $B \subset A$ であって $A = B$ でないとき，B は A の**真部分集合** proper subset といって “$B \subsetneq A$” または “$B \subsetneqq A$” と書く．

1.3　合併集合・共通部分・補集合

■合併集合・共通部分　二つの集合 A, B に対して

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\} = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}, \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\} \quad = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \end{aligned}$$

をそれぞれ A, B の**合併集合** union, **共通部分** intersecion という[*7]．

■　集合 A, B に対して次が成り立つ：

$$\begin{array}{llll} A \cup B = B \cup A & A \subset A \cup B & A \cap B = B \cap A & A \cap B \subset A \\ A \cup \emptyset = A & A \cap \emptyset = \emptyset & A \cup A = A & A \cap A = A \end{array} \tag{1.2}$$

が成り立つ．さらに，集合 A, B, C に対して結合法則および分配法則

$$\begin{array}{ll} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array} \tag{1.3}$$

が成り立つ．

■補集合　ある集合 X の部分集合のみを考えるような文脈では X のことを普遍集合あるいは全体集合などということにする．X の部分集合 A に対して

$$X \setminus A = A^c = \{x \in X \mid x \notin A\} = \{x \in X \mid \neg(x \in A)\}$$

を A の (X における) **補集合** complement という[*8]．とくに

$$(A^c)^c = A, \qquad A^c \cup A = X, \qquad A^c \cap A = \emptyset, \qquad X^c = \emptyset \tag{1.4}$$

が成り立つ．

[*7] “P かつ Q” (P and Q) のことを “$P \wedge Q$”, “P または Q” (P or Q) のことを “$P \vee Q$” と書く．

[*8] “$X \setminus A$” のことを “$X - A$” と書くこともある．また “P でない” ことを “$\neg P$” と書く．

■ド・モルガンの法則　全体集合 X の部分集合 A, B に対して次が成り立つ (ド・モルガン de Morgan の法則)

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \tag{1.5}$$

証明には次を用いる[*9]

補題 1.1. 条件 P, Q に対して

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q), \qquad \neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

が成り立つ.

1.4　冪集合

■冪集合　集合 A の部分集合全体の集まりを A の**冪集合** power set とよび $\mathfrak{P}(A)$ または 2^A と書く.

問題

1-1
- 集合 A, B がともに X の部分集合ならば，$A \cup B$ は X の部分集合である.
- 集合 Y が集合 A, B 両方の部分集合ならば，Y は $A \cap B$ の部分集合である.

1-2 ド・モルガンの法則 (1.5) を証明しなさい.

1-3 集合 $A = \{1, 2, 3\}$　の冪集合 $\mathfrak{P}(A)$　の要素をすべてあげなさい.

1-4 一般に n 個の要素をもつ集合 A の冪集合 $\mathfrak{P}(A)$ の要素の個数は 2^n である.

1-5 $\boldsymbol{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \boldsymbol{R}\}$ とし,

$$X = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid xy = 0\}, \qquad O = \{(0, 0)\}$$
$$A = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x = 0\}, \qquad B = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid y = 0\}$$

とするとき，A, B で X, O を表しなさい.

1-6 ベクトル空間 (線形空間) V の部分空間 X, Y に対して

$$X + Y = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in Y\}$$

を X と Y の (線形空間としての) **和**という.
- $X \subset X + Y$ であることを示しなさい.
- $X \cup Y \subset X + Y$ であることを示しなさい.
- $X \cup Y = X + Y$ となるための必要十分条件は何か.

[*9] これもド・モルガンの法則と呼ばれる.

2　写像

■写像　集合 X の各要素 $x \in X$ に対して，集合 Y の要素 $f(x) \in Y$ を対応させる対応の規則 f を X **から** Y **への写像**，X を f の**定義域**, Y を f の**値域**という[*10]．写像 f の定義域が X，値域が Y であることを

$$f \colon X \longrightarrow Y$$

と書く．この写像 f が $x \in X$ に対して $f(x) \in Y$ を対応させる，ということを明示するときは，矢印 "$\rightarrow$" の代わりに "$\mapsto$" を用いて

$$f \colon X \ni x \longmapsto f(x) \in Y$$

と書く．とくに，値域が $\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{C}$ であるような写像 $f \colon X \to \boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{C}$) を X 上の**関数** (実数値関数・複素数値関数) ということがある．

■制限　写像 $f \colon X \to Y$ と $A \subset X$ に対して

$$f|_A \colon A \ni x \longmapsto f(x) \in Y$$

で与えられる $f|_A \colon A \to Y$ を f の A への**制限**という．

■像と逆像　写像 $f \colon X \to Y$ が与えられているとき，$A \subset X, U \subset Y$ に対して

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset Y, \qquad f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$$

をそれぞれ f による A の**像**, U の**逆像**とよぶ[*11]．像 $f(A)$ は

$$f(A) = \{y \in Y \mid f(x) = y \text{ となる } x \in A \text{ が存在する }\}$$

と表すこともできる．

写像 $f \colon X \to Y$ と $A, B \subset X, U, V \subset Y$ に対して次が成り立つ：

$$\begin{aligned} &f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) &\qquad &f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \\ &f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) & &f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \\ &f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B) & &f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(U \setminus V) \\ &A \subset f^{-1}(f(A)) & &U \supset f(f^{-1}(U)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

■直積　集合 X, Y に対して，

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

を X と Y の**直積**という．

例 2.1. $\boldsymbol{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \boldsymbol{R}\}$ は $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ とみなすことができる．

直積 $X \times Y$ に対して，

$$\pi_X \colon X \times Y \ni (x, y) \longmapsto x \in X, \qquad \pi_Y \colon X \times Y \ni (x, y) \longmapsto y \in Y \tag{2.2}$$

をそれぞれ第一成分，第二成分への**射影**という．

2011 年 4 月 19 日 (2011 年 4 月 26 日訂正)

[*10] 値域という言葉を f による X の像 $f(X)$ の意味で使うこともある．

[*11] 紛らわしい記号だが，要素 $x \in X$ に対して $f(x) \in Y$ であるが，$A \subset X$ に対して $f(A) \subset Y$ である．また，f^{-1} は逆関数の記号と同じであるが，f が全単射でない場合でも定義される．

■グラフ　写像 $f\colon X \to Y$ に対して

$$\mathrm{graph}(f) = \bigl\{\bigl(x, f(x)\bigr) \in X \times Y \mid x \in X\bigr\} = \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in X, y = f(x)\} \subset X \times Y$$

を f の**グラフ**という．

■全射・単射　写像 $f\colon X \to Y$ が**全射**であるとは $f(X) = Y$ が成り立つことである．また，**単射**であるとは，

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

が任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して成立することである．写像 f が全射かつ単射であるとき f は**全単射**であるという．

例 2.2.
- 集合 X から X への写像 $\mathrm{id}_X\colon X \ni x \mapsto x \in X$ を**恒等写像**であるという．恒等写像は全単射である．
- 集合 X の部分集合 A に対して

$$i_A\colon A \ni x \longmapsto x \in X$$

で定義される写像 $i_A\colon A \to X$ を**包含写像**という．包含写像は単射である．さらに包含写像 i_A が全射であるための必要十分条件は $A = X$ となることである．

■合成写像　写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ に対して

$$g \circ f\colon X \ni x \longmapsto g \circ f(x) = g\bigl(f(x)\bigr) \in Z$$

で与えられる写像 $g \circ f\colon X \to Z$ を f と g の**合成**という．

■逆写像　写像 $f\colon X \to Y$ に対して，写像 $g\colon Y \to X$ で

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

となるものが存在するとき g を f の**逆写像**といい，$g = f^{-1}$ と書く．

定理 2.3. 写像 f の逆写像が存在するための必要十分条件は f が全単射となることである．

問題

2-1 集合 $X = \{1, \ldots, m\}$，$Y = \{1, \ldots, n\}$ に対して X から Y への写像全体の集合は n^m 個の要素からなる．

2-2 (2.1) を示し，等号でないものは等号が成り立たない具体例をあげなさい．

2-3 写像 $f\colon X \to Y$ が全射 (単射) であるための必要十分条件は，$\pi_Y|_{\mathrm{graph}(f)}$ が全射 (単射) となることである．ただし $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ は第二成分への射影である．

2-4 写像 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to z$ に対して $g \circ f$ が単射ならば f は単射であり，$g \circ f$ が全射なら g は全射である．

2-5 写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to X$ で，$g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ f は全射でないような具体例をあげなさい．

2-6 X, Y をベクトル空間，$f\colon X \to Y$ を線形写像とする．

- 写像 f が単射であるための必要条件は $f^{-1}(\{0_Y\}) = \{0_X\}$ となることである．ただし $0_X, 0_Y$ はそれぞれ X, Y の零ベクトルである．
- X と Y の次元がともに有限で一致するとき，f が全射であるための必要十分条件は f が単射であることである．

2-7 $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合

$$X = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \qquad S^2 = \bigl\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\bigr\}$$

に対して，

$$f\colon X \ni (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (\xi,\eta) \in \boldsymbol{R}^2, \qquad \text{ただし} \qquad \xi = \frac{x}{1+z}, \quad \eta = \frac{y}{1+z}$$

により写像 $f\colon X \to \boldsymbol{R}^2$ を定める．この写像は全単射であることを示し，逆写像を求めなさい．

3　集合の濃度

■対等　2 つの集合 X, Y の間に全単射 $f\colon X \to Y$ が存在するとき，X と Y は**対等**であるという．

補題 3.1. 集合 X, Y, Z に対して

- X と X は対等である．
- X と Y が対等ならば Y と X は対等である．
- X と Y が対等，かつ Y と Z が対等なら X と Z は対等である．

例 3.2. 自然数全体集合 $\boldsymbol{N}$ は次のものと対等である：

- 自然数 m に対して m 以上の自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}_m = \{k \in \boldsymbol{N} \mid k \geqq m\}$．実際 $f(k) = k + m - 1$ とすると $f\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}_m$ は全単射である．
- 整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$．実際，$f\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & (x \text{ は偶数}) \\ -\frac{x-1}{2} & (x \text{ は奇数}) \end{cases}$$

  と定めればよい．
- 直積 $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$．
- 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$．

例 3.3. 実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は次のものと対等である．

- 開区間 $(0,1)$．実際，$f(x) = \frac{1}{2}\bigl(1 + x/(1 + |x|)\bigr)$ は全単射 $f\colon \boldsymbol{R} \to (0,1)$ を与える．
- 区間 $(0,1]$．実際，区間 $(0,1]$ との間の全単射 $f\colon (0,1) \to (0,1]$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} & \bigl(x = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots\bigr) \\ x & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

  と定めると，これは全単射である．

定義 3.4. 二つの集合 X, Y が対等であるとき，X と Y の**濃度は等しい**といい，$|X| = |Y|$ と書く．

■有限集合と無限集合

補題 3.5. 自然数 m, n に対して $\{1, \dots, m\}$ と $\{1, \dots, n\}$ が対等であるならば $m = n$ である．

> **証明：** m に関する数学的帰納法による[*12]．全単射 $f\colon \{1\} \to \{1, \dots, n\}$ が存在するならば，f の像は要素を 1 つもつから $n = 1$ でなければならない．すなわち $m = 1$ の場合，補題は成立する．
> 一般に全単射 $f\colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ が存在したとする．適当に順番を取り替えて $f(m) = n$ として一般性を失わない．すると $f|_{1,\dots,m-1}$ は $\{1, \dots, m-1\}$ から $\{1, \dots, n-1\}$ への全単射だが，数学的帰納法の仮定から $m - 1 = n - 1$ である．

2011 年 4 月 26 日 (2011 年 6 月 14 日訂正)

[*12] 講義資料の証明はたいてい "証明の概略" に留められている．各自，証明を完全にする工夫をすること．

定義 3.6. 空集合でない集合 X が**有限集合**である，とは，ある自然数 m が存在して m 以下の自然数の集合 $\{1, 2, \ldots, m\}$ と X が対等となることである．このとき，X の濃度は m である，といい，$|X| = m$ と書く．空集合 $\emptyset$ は有限集合で，その濃度は 0 であると定める．

定義 3.7. 集合 X が有限集合でないとき**無限集合**という．

例 3.8. 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ は無限集合である．

補題 3.9. 集合 X の部分集合 Y が無限集合ならば X は無限集合である．

■濃度の比較

定義 3.10. 二つの集合 X，Y の間に単射 $f\colon X \to Y$ が存在するとき，$|X| \leqq |Y|$ と書く．

定理 3.11 (Bernstein)**.** 二つの集合 X, Y が $|X| \leqq |Y|$, $|Y| \leqq |X|$ を満たすならば $|X| = |Y|$ である．

証明： 単射 $f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to X$ が存在するとして，X から Y への全単射を構成すればよい．いま，X, Y の要素を交互に並べた (有限または無限) 列

$$x_0, y_1, x_2, \ldots, \qquad \text{または} \qquad y_0, x_1, y_2, \ldots$$

が適合的である，ということを

$$x_j = g(y_{j+1}), \qquad y_j = f(x_{j+1})$$

が成り立つことと定義する．この定義のもと，

$$\begin{aligned}
X_\infty &= \{x \in X \mid \text{適合的な無限列 } x_0, y_1, x_2, \ldots \text{ で } x = x_0 \text{ となるものが存在する}\}\\
X_X &= \left\{x \in X \,\middle|\, \begin{array}{l}\text{適合的な有限列 } x_0, y_1, x_2, \ldots, x_m \text{ で } x = x_0\\ \text{かつ } x_m \in X,\ x_m \notin g(Y) \text{ となるものが存在する}\end{array}\right\}\\
X_Y &= \left\{x \in X \,\middle|\, \begin{array}{l}\text{適合的な有限列 } x_0, y_1, x_2, \ldots, y_m \text{ で } x = x_0\\ \text{かつ } y_m \in Y,\ y_m \notin f(X) \text{ となるものが存在する}\end{array}\right\}\\
Y_\infty &= \{y \in Y \mid \text{適合的な無限列 } y_0, x_1, y_2, \ldots \text{ で } y = y_0 \text{ となるものが存在する}\}\\
Y_X &= \left\{y \in Y \,\middle|\, \begin{array}{l}\text{適合的な有限列 } y_0, x_1, y_2, \ldots, x_m \text{ で } y = y_0\\ \text{かつ } x_m \in X,\ x_m \notin g(Y) \text{ となるものが存在する}\end{array}\right\}\\
Y_Y &= \left\{y \in Y \,\middle|\, \begin{array}{l}\text{適合的な有限列 } y_0, x_1, y_2, \ldots, y_m \text{ で } y = y_0\\ \text{かつ } y_m \in Y,\ y_m \notin f(X) \text{ となるものが存在する}\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

とおくと，X と Y は

$$X = X_\infty \cup X_X \cup X_Y, \qquad Y = Y_\infty \cup Y_X \cup Y_Y$$

と，共通部分をもたない合併集合に分解できる．さらに

$$f|_{X_\infty}\colon X_\infty \to Y_\infty, \qquad f|_{X_X}\colon X_X \to Y_X, \qquad g|_{Y_Y}\colon Y_Y \to X_Y$$

はそれぞれ全単射になる．そこで $F\colon X \to Y$ を

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in X_\infty \cup X_X)\\ g|_{Y_Y}^{-1}(x) & (x \in X_Y)\end{cases}$$

とおけば F は全単射である．

とくに $|X| \leqq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$ のとき，$|X| < |Y|$ と書くことにする．

例 3.12.

- 実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$，区間 $(0, 1)$ と $(0, 1]$, $[0, 1]$ は互いに対等である．

- $(0,1)\times(0,1)$ と $(0,1)$ は互いに対等である．実際 $f\colon(0,1)\to(0,1)\times(0,1)$ を $f(x)=(x,\frac{1}{2})$ とすればこれは単射．一方 $g:(0,1)\times(0,1)\to(0,1)$ を次のように定める：$x,\,y\in(0,1)$ に対してそれらの 10 進小数表示を $x=0.x_1x_2\ldots,\ y=0.y_1y_2\ldots$ とする．ただし $x_j,\,y_j$ は 0 から 9 までの整数で，小数表示は一通りに決まるような約束をしておくものとする．このとき $g\bigl((x,y)\bigr)=0.x_1y_1x_2y_2\ldots$ とすると g は単射．

■冪集合の濃度

定理 3.13. 集合 X に対して $|X|<|\mathfrak{P}(X)|$.

> **証明：** 単射 $f\colon X\ni x\mapsto\{x\}\in\mathfrak{P}(X)$ が存在するので $|X|\leqq|\mathfrak{P}(X)|$．したがって $|X|\neq|\mathfrak{P}(X)|$ であることを示せばよい．全単射 $g\colon X\to\mathfrak{P}(X)$ が存在したとして矛盾を導こう．いま $V=\{x\in X\,|\,x\notin g(x)\}\in\mathfrak{P}(X)$ とおく．g は全射だから $g(v)=V$ となる $v\in X$ が存在する．いま $v\in V$ とすると $v\notin g(v)=V$，また $v\notin V$ とすると $v\in g(v)=V$ であり矛盾が生じる．

以下，X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)=2^X$ の濃度を $2^{|X|}$ と書く．

■実数全体の集合の濃度

定理 3.14. $|\boldsymbol{R}|=2^{|\boldsymbol{N}|}$．とくに $|\boldsymbol{N}|<|\boldsymbol{R}|$.

> **証明：** 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{N}$ と対等だから全単射 $\varphi\colon\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{N}$ が存在するが，これは全単射 $\tilde{\varphi}\colon\mathfrak{P}(\boldsymbol{Q})\to\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ を誘導する．一方，$\psi\colon\boldsymbol{R}\to\mathfrak{P}(\boldsymbol{Q})$ を
>
> $$\psi(x)=\{r\in\boldsymbol{Q}\,|\,r<x\}$$
>
> とすると ψ は単射．したがって，単射 $\tilde{\varphi}\circ\psi\colon\boldsymbol{R}\to\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ が存在する．
> 一方，$V\in\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ に対して $g(V)\in\boldsymbol{R}$ を
>
> $$g(V)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{v_j}{3^j}\qquad v_j=\begin{cases}1 & (j\in V)\\ 0 & (j\notin V)\end{cases}$$
>
> と定めると，これは単射.

問題

3-1 補題 3.1.

3-2 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ の要素を“一列に並べる”ことで $\boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{N}$ が対等であること (例 3.2) を示しなさい.

3-3 閉区間 $[0,1]$ と開区間 $(0,1)$ は対等であることを示しなさい.

3-4 $\boldsymbol{R}$ 上で定義された連続関数全体の集合 $\mathcal{F}$ は $\boldsymbol{R}$ と対等であることを示しなさい．（ヒント：連続関数の性質から $f,\,g\in\mathcal{F}$ に対して $f=g$ であるための必要十分条件は $f|_{\boldsymbol{Q}}=g|_{\boldsymbol{Q}}$）

3-5 $X=\boldsymbol{N}$ から $Y=\boldsymbol{N}$ への単射 $f(x)=x+1,\ g(x)=2x$ に対して，定理 3.11 の証明の $X_\infty,\ X_X,\ X_Y\ldots$ を具体的に求めなさい.

3-6 $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}^2$ は対等である.

3-7 $|\boldsymbol{N}|<|\boldsymbol{R}|$ であることを，次のようにして直接証明しなさい：
   - $\boldsymbol{R}$ と $(0,1)$ は対等である.

- 全射 $f\colon \boldsymbol{N} \to (0,1)$ が存在すると仮定し，$y_j = f(j)$ とし，その十進小数表示を

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\
y_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

  としておく．ただし，小数展開は一意的になるような約束をしておく．
- $j = 1, 2, \dots$ に対して $b_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ を $b_j \neq a_{jj}$ となるようにとる．
- 実数 $0.b_1b_2\dots$ は y_1, y_2,... のいずれとも異なる．

4　直積・選択公理・可算集合

■集合族　適当な集合の集まり (集合) $\mathfrak{X}$ と集合 Λ に対して，写像

$$\Lambda \ni \lambda \longmapsto U_\lambda \in \mathfrak{X}$$

を Λ **により添字付けられた集合族**, Λ をその**添字集合**という．

この集合族のことを $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ と書くこともある．

例 4.1.
- 有限集合 $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ によって添字付けられた集合族とは n 個の集合 A_1, A_2, ..., A_n の集まりのことである．
- 集合 $\Lambda = \boldsymbol{N} = \{1, 2, \dots\}$ により添字付けられた集合族とは，集合の (無限) 列 $\{A_1, A_2, \dots\}$ のことである．
- $\Lambda = \boldsymbol{R}$ として，実数 $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して $U_\lambda = \{x \in \boldsymbol{Q} \mid x < \lambda\}$ とすると $\{U_\lambda \mid \lambda \in \boldsymbol{R}\}$ は $\boldsymbol{R}$ の部分集合からなる集合族である．この集合族は，写像 $\boldsymbol{R} \to \mathfrak{P}(\boldsymbol{R})$ とみなすことができる．

次の演算を定義しておこう：

定義 4.2. 集合族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda := \{x \mid x \in U_\lambda \text{ となる } \lambda \in \Lambda \text{ が存在 する }\}, \qquad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda := \{x \mid \text{すべての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } x \in U_\lambda\}$$

と定める．とくに，添字集合が $\boldsymbol{N} = \{1, 2, \dots\}$ のとき, 集合族 $\{U_1, U_2, \dots\}$ に対してこれらを

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

と書く．

例 4.3.
- 自然数 n に対して $U_n = (-n, n) \subset \boldsymbol{R}$ とする．このとき $\cup_{n=1}^{\infty} U_n = \boldsymbol{R}$ である．
- 自然数 n に対して $V_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \subset \boldsymbol{R}$ とする．このとき $\cap_{n=1}^{\infty} V_n = \{0\}$ である．
- 自然数 n に対して $W_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset \boldsymbol{R}$ とする．このとき $\cap_{n=1}^{\infty} W_n = \{0\}$ である．

■直積　すでに 2 個の集合 X, Y の直積の定義は与えた：

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

この概念を無限個の集合 (集合族) に拡張しよう．

定義 4.4. 集合 Λ によって添字付けられた集合族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して, 写像の集合

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda := \left\{ \varphi \colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \;\middle|\; \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して} \varphi(\lambda) \in U_\lambda \right\}$$

を $\{U_\lambda\}$ の**直積**という．

2011 年 5 月 3 日

例 4.5. 有限集合 $\Lambda = \{1,2\}$ で添字付けられた集合族 $\{U_1, U_2\}$ に対して

$$V := \prod_{\lambda \in \{1,2\}} U_\lambda \left(= U_1 \times U_2 \right)$$

の各要素 $\varphi \in V$ は $\{1,2\}$ から $U_1 \cup U_2$ への写像で $\varphi(1) \in U_1$, $\varphi(2) \in U_2$ となるものである．U_1 の要素 u_1 と U_2 の要素 u_2 を与えれば，そのような写像 φ はただ一つ定まるので，V は組み (u_1, u_2) $(u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2)$ 全体の集合と同一視される (問題 4-2 参照).

定義 4.6. 集合族 $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ の直積から各 U_μ $(\mu \in \Lambda)$ への写像

$$\pi_\mu \colon \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right) \ni \varphi \longmapsto \varphi(\mu) \in U_\mu$$

を**射影** projection という．

■選択公理

公理 4.7 (選択公理)**.** すべての U_λ が空集合でないような集合族 $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ に対して，直積 $\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は空集合でない．

このことは，“ (一般に有限個とは限らない) 集合族のすべての集合から一度に一つずつ要素を取り出すことができる” ということを述べている．

命題 4.8. 空でない集合からなる集合族 $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ に対して，定義 4.6 の射影 $\pi_\mu \colon \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) \to U_\mu$ は全射である．

証明： 選択公理より $\varphi \in \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が存在する．各 $y \in U_\mu$ に対して

$$\varphi_y \colon \Lambda \ni \lambda \longmapsto \varphi_y(\lambda) = \begin{cases} \varphi(\lambda) & (\lambda \neq \mu) \\ y & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

とすると $\varphi_y \in \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ で $\pi_\mu(\varphi_y) = \varphi_y(\mu) = y$ となる．

定理 4.9. 集合 X, Y に対して全射 $f \colon X \to Y$ が存在するならば，写像 $g \colon Y \to X$ で $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ となるものが存在する．

証明： 各 $y \in Y$ に対して $U_y = f^{-1}(\{y\})$ とおくと，f が全射であることから $U_y \neq \emptyset$. 従って, 選択公理より $\prod_{y \in Y} U_y$ は空集合でないで，その要素 g をとる．直積の定義から g は Y から $\cup_{y \in Y} U_y$ への写像であるが,

$$\cup_{y \in Y} U_y = \cup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}\left(\cup_{y \in Y}\{y\}\right) = f^{-1}(Y) = X$$

なので $g \colon Y \to X$ が得られたことになる．直積の定義から，任意の $y \in Y$ に対して $g(y) \in U_y = f^{-1}(\{y\})$ だから $f \circ g(y) = y$ となり結論が得られた．

系 4.10. 集合 X から Y への全射 f が存在するならば，単射 $g \colon Y \to X$ が存在する．とくに $|Y| \leqq |X|$ である．

定理 4.11. 空でない集合 X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ から空集合をのぞいたものを $\mathfrak{X}$ とする：$\mathfrak{X} = \mathfrak{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. このとき，写像 $f \colon \mathfrak{X} \to X$ で，各 $U \in \mathfrak{X}$ に対して $f(U) \in U$ となるものが存在する．

証明. 集合族 $\{U \mid U \in \mathfrak{X}\}$ は空集合を要素にもたないので，選択公理からそれらの直積は空でない．そこで $f \in \prod_{U\in\mathfrak{X}} U$ をとると，f は写像

$$f\colon \mathfrak{X} \longrightarrow \bigcup_{U\in\mathfrak{X}} U = X$$

で $f(U) \in U$ となるものである． □

系 4.12. 無限集合 X に対して，単射 $g\colon \boldsymbol{N} \to X$ が存在する．

証明. 集合 X に対して, 定理 4.11 のような写像 $f\colon \mathfrak{P}(X)\setminus\{\emptyset\} \to X$ をとる．いま $X \neq \emptyset$ だから $a_1 = f(X)$, $a_{j+1} = f(X \setminus \{a_1, \dots, a_j\})$ $(j = 2, 3, \dots)$ により，帰納的に $\{a_j\}$ を定める．$n \in \boldsymbol{N}$ に対して $g(n) = a_n$ とすれば g は単射である． □

■可算集合　系 4.12 より $\boldsymbol{N}$ の濃度は無限集合の最小の濃度であることがわかる．そこで $|\boldsymbol{N}|$ のことを**可算濃度**とよび，$\boldsymbol{N}$ と対等な集合を**可算無限集合**または**可算集合**，有限集合か可算無限集合であるような集合を**たかだか可算**という．

可算濃度を $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$ を $\aleph$ (ヘブライ文字のアレフ) と書くことがある．

問題

4-1 例 4.3 を確かめなさい．

4-2 有限個の集合族 $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ に対して

$$V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in A_j (j = 1, \dots, n)\}$$

と直積集合

$$W := \prod_{j=1}^{n} A_j = \left\{ \varphi\colon \{1, \dots, n\} \to \bigcup_{j=1}^{n} A_j \;\middle|\; \varphi(j) \in A_j (j = 1, \dots, n) \right\}$$

の間の写像

$$\iota\colon W \ni \varphi \longmapsto \bigl(\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\bigr) \in V$$

は全単射である．

4-3 系 4.12 の証明で構成した g が単射であることを確かめなさい．

5　二項関係・ツォルンの補題

■二項関係　集合 X に対して，直積集合 $X \times X$ の部分集合 R のことを**二項関係**という．二項関係 R が与えられたとき，$(x,y) \in R$ であることを $x \sim_R y$ と書く．

例 5.1.
- $\Delta_X = \{(x,x) \in X \times X \,|\, x \in X\}$ を**対角集合**という．これを X の二項関係とみなすと $x \sim_{\Delta_X} y$ とは $x = y$ のことである．
- $R = \{(x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \,|\, x \leqq y\}$ を二項関係とみなすとき $x \sim_R y$ とは $x \leqq y$ のことである．

■順序関係・順序集合

定義 5.2. 集合 X の二項関係 R が次を満たすとき，R を**順序関係**という：

- 任意の $x \in X$ に対して $x \sim_R x$ である．
- 任意の $x, y \in X$ に対して $x \sim_R y$ かつ $y \sim_R x$ ならば $x = y$ である．
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して $x \sim_R y$ かつ $y \sim_R z$ ならば $x \sim_R z$ である．

関係 R が順序関係であるときは，$x \sim_R y$ のかわりに $x \preceq_R y$ と書くことにしよう．

例 5.3.
- 例 5.1 の 2 番目 (実数の大小)
- 部分集合 $U, V \subset X$ に対して "$U \preceq_R V$" $\equiv$ "$U \subset V$" と定めると，$\preceq_R$ は冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ の順序関係[*13]．

集合 X に順序関係 $\preceq$ が与えられているとき $(X, \preceq)$ を**順序集合**という．このとき，部分集合 $Y \subset X$ に関係 $\preceq$ を制限すれば順序集合 $(Y, \preceq)$ が得られる．

■ツォルンの補題

定義 5.4. 順序集合 $(X, \preceq)$ に対して，

- $(X, \preceq)$ が**全順序集合**とは，任意の $x,\, y \in X$ に対して $x \preceq y$ または $y \preceq x$ が成り立つことである．
- $(X, \preceq)$ の全順序部分集合 Y の**上界**とは，$c \in X$ で，任意の $y \in Y$ に対して $y \preceq c$ となるものである．
- **帰納的順序集合**とは，順序集合 $(X, \preceq)$ で，X の任意の全順序部分集合が上界をもつものである．

定理 5.5 (ツォルンの補題)**.** 帰納的順序集合 $(X, \preceq)$ と $a \in X$ に対して，$c \in X$ で $a \preceq c$ かつ次を満たすものが存在する：任意の $x \in X$ に対して $c \preceq x$ が成り立つならば $c = x$ である (すなわち c は**極大元**である)．

証明のために，まず次の集合を定義する：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T} &:= \{T \subset X \,|\, a \in T \text{ かつ } T \text{ は全順序集合}\}, \\
C_T &:= \{c \in X \,|\, c \text{ は } T \text{ の上界 かつ } c \notin T\} \quad (T \in \mathcal{T}).
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

補題 5.6. 集合 $T \in \mathcal{T}$ で $C_T = \emptyset$ となるものが存在する．

2011 年 5 月 10 日 (2011 年 5 月 28 日訂正)

[*13] 定義にそのまま従えば $R = \{(U,V) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \,|\, U \subset V\}$ が順序関係ということになるが，このように $\preceq_R$ 自体を順序関係とよんでもよい (というかその方が自然)．

証明： 任意の $T \in \mathcal{T}$ に対して $C_T \neq \emptyset$ として矛盾を導く．選択公理より $\gamma \in \prod_{T\in\mathcal{T}} C_T$ が存在する．いま，

(5.2) $$\text{任意の } T \in \mathcal{T} \text{ に対して } T' := T \cup \{\gamma(T)\}$$

と書いておく．これを用いて，$\mathcal{T}$ の部分集合の族 $\mathfrak{A}$ とその共通部分 $\mathcal{R}_0$ を次のようにとる：

(5.3) $$\mathfrak{A} := \left\{ \mathcal{R} \subset \mathcal{T} \;\middle|\; \begin{array}{ll} (a) & \{a\} \in \mathcal{R} \\ (b) & T \in \mathcal{R} \text{ ならば } T' \in \mathcal{R} \\ (c) & \mathcal{S} \subset \mathcal{R} \text{ が "}\subset\text{" に関して全順序的ならば } \cup_{T\in\mathcal{S}} T \in \mathcal{R} \end{array} \right\}, \qquad \mathcal{R}_0 := \bigcap_{\mathcal{R}\in\mathfrak{A}} \mathcal{R}.$$

- $\mathcal{T} \in \mathfrak{A}$ である．すなわち $\mathfrak{A} \neq \emptyset$．実際 (a) $\{a\}$ は a を要素に含む全順序集合だから $\{a\} \in \mathcal{T}$．(b) $T \in \mathcal{T}$ に対して $\gamma(T) \in C_T$ は T の上界だから $T' = T \cup \{\gamma(T)\}$ も全順序集合．(c) $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ を全順序部分集合とする．このとき，$x, y \in \cup_{T\in\mathcal{S}} T$ に対して $x \in T_1, y \in T_2$ $(T_1, T_2 \in \mathcal{S})$ となる T_1, T_2 をとると $\mathcal{S}$ が全順序集合であることから $T_1 \subset T_2$ または $T_2 \subset T_1$ が成り立つ．前者の場合，$x, y \in T_2$ かつ T_2 が全順序集合だから $x \preceq y$ または $y \preceq x$．後者の場合も同様なので $\cup_{T\in\mathcal{S}} T$ は全順序集合なので $\mathcal{T}$ の要素である．
- $\mathcal{R}_0$ は "$\subset$" に関する全順序集合である．このことを示すために $\mathcal{R}_0$ の部分集合

$$\mathcal{R}_T := \{U \in \mathcal{R}_0 \,|\, U \subset T \text{ または } T \subset U\}, \qquad \mathcal{R}_1 := \{T \in \mathcal{R}_0 \,|\, \mathcal{R}_T = \mathcal{R}_0\}$$

を考える．まず $\mathcal{R}_1 \in \mathfrak{A}$ を示す：(a) $T = \{a\}$ とすると任意の $U \in \mathcal{R}_0$ に対して $T \subset U$ だから $\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_0$．したがって $\{a\} \in \mathcal{R}_1$．(c) $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_0$ を全順序的部分集合とすると，任意の $\mathcal{R} \in \mathfrak{A}$ に対して $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ だから $\mathfrak{A}$ の定義から $T := \cup_{S\in\mathcal{S}} S \in \mathcal{R}$．$\mathcal{R}$ は任意だったから $T \in \mathcal{R}_0$．さらに $T \in \mathcal{R}_1$ であることを示す．各 $S \in \mathcal{S} \subset \mathcal{R}_1$ だから $U \in \mathcal{R}_0$ に対して $U \subset S$ または $S \subset U$ のいずれかが成り立つ．もし，ある $S \in \mathcal{S}$ に対して $U \subset S$ ならば，$U \subset T$．したがって $U \in \mathcal{R}_T$．一方，すべての $S \in \mathcal{S}$ に対して $U \subset S$ でなければすべての S に対して $S \subset U$ なので $T \subset U$．したがって $U \in \mathcal{R}_T$．以上より $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}_T$ だから $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_T$．すなわち $T \in \mathcal{R}_1$．(b) $T \in \mathcal{R}_1$ ならば $\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_0$ が成り立っている．このとき，$U \in \mathcal{R}_{T'}$ をとり，$U' \in \mathcal{R}_{T'}$ であることを示したい．定義から $U \subset T'$ または $T' \subset U$ が成り立つ．一方 $U \in \mathcal{R}_{T'} \subset \mathcal{R}_0 \in \mathfrak{A}$ だから $U' \in \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_T$．
したがって $U' \subset T$ または $T \subset U'$ が成り立つ．以上より

$$(U \subset T' \text{ または } T' \subset U) \text{ かつ } (U' \subset T \text{ または } T \subset U')$$

が成り立つ．これに "and", "or" に関する分配法則を適用すればつぎの 4 つのうちどれか一つが成り立つことがわかる：

$$\begin{array}{llll} \text{(A)} & U \subset T' \text{ かつ } U' \subset T & \text{(B)} & U \subset T' \text{ かつ } T \subset U' \\ \text{(C)} & T' \subset U \text{ かつ } U' \subset T & \text{(D)} & T' \subset U \text{ かつ } T \subset U' \end{array}$$

ここで T' の定義式 (5.2) から $T \subsetneq T'$ なので (C) は起きえない．また $U' \subset T$ が成り立つなら $U \subset T'$ なので (A) は $U' \subset T$ と書き換えることができる．同様にして (D) は $T' \subset U$ の書き換えられるので，これらは

$$\text{(A')} \quad U' \subset T \qquad \text{(B')} \quad U \subset T' \text{ かつ } T \subset U' \qquad \text{(D')} \quad T' \subset U$$

と書き換えられる．(A') の場合は $U \subset U' \subset T \subset T'$ が成り立つから $U' \in \mathcal{R}_{T'}$，(D') の場合は $T' \subset U \subset U'$ だからやはり $U' \in \mathcal{R}_{T'}$．(B') の場合を考える．このとき $U \subset U \cup T \subset U \cup U' = U'$，$T \subset U \cup T \subset T' \cup T = T'$ であるが，$U' = U \cup \{\gamma(U)\}$, $V = V \cup \{\gamma(V)\}$ はそれぞれ U, V に一つの要素を付け加えたものであるから，

$$(U = U \cup T \quad \text{または} \quad U' = U \cup T) \quad \text{かつ} \quad (T = U \cup T \quad \text{または} \quad T' = U \cup T)$$

が成立する．これらに "and", "or" の分配法則を用いれば次の 4 つの場合のどれか一つが成り立つ：(B1) $U = U \cup T$ かつ $T = U \cup T$．このとき $U = T$ だから $U' = T'$ となり，$U' \in \mathcal{R}_{T'}$．(B2) $U = U \cup T$ かつ $T' = U \cup T$．このとき $U = T'$ なので $U' \supset U = T'$．したがって $U' \in \mathcal{R}_{T'}$．(B3) $U' = U \cup T$ かつ $T = U \cup T$．このときは $U' = T \subset T'$ だから $U' \in \mathcal{R}_{T'}$. $U \in \mathcal{R}_{T'}$．(B4) $U' = U \cup T$ かつ $T' = U \cup T$．このとき $U' = T'$ だから $U \in \mathcal{R}_{T'}$．

以上より $\mathcal{R}_0=\mathcal{R}_T$ のとき，任意の $U\in\mathcal{R}_0$ に対して $U\in R_{T'}$ が成り立つことがわかった．ここで $R_{T'}\subset\mathcal{R}_0$ だから $\mathcal{R}_0=R_{T'}$ が成り立つ．したがって $T'\in\mathcal{R}_1$ が成り立つ．
これらから $\mathcal{R}_1\in\mathfrak{A}$ がわかる．したがって $\mathcal{R}_0\subset\mathcal{R}_1$ かつ $\mathcal{R}_1\subset\mathcal{R}_0$ なので $\mathcal{R}_1=\mathcal{R}_0$.
ここで $\mathcal{R}_1$ は全順序集合だから $\mathcal{R}_0$ は全順序集合である．

- いま $T_0:=\cup_{T\in\mathcal{R}_0}T$ とおくと，$\mathcal{R}_0=\mathcal{R}_1\in\mathfrak{A}$ であることから $T_0\in\mathcal{R}_0$ (性質 (c) と $\mathcal{R}_0$ が全順序集合であること)．とくに T_0 の作り方から，任意の $T\in\mathcal{R}_0$ に対して $T\subset T_0$．ここで 性質 (b) から $T_0'=T_0\cup\{\gamma(T_0)\}\in\mathcal{R}_0$ となるので，$T_0'\subset T_0$：
$$T_0'=T_0\cup\{\gamma(T_0)\}\subset T_0.$$
ここで γ の選び方より $\gamma(T_0)\notin T_0$ であるから矛盾が生じる．

定理 5.5 の証明. 補題 5.6 のような T をとる．X は帰納的順序集合だから，T の上界 $c\in X$ が存在する．さらに $C_T=\emptyset$ だから $c\in T$．$T\in\mathcal{T}$ だから $a\in T$ なので，上界の定義から $a\preceq c$. また $x\in X$ が $c\preceq x$ を満たすならば，任意の $t\in T$ に対して $t\preceq c\preceq x$ が成り立つので x は T の上界．とくに $C_T=\emptyset$ だから $x\in T$ なので $x\preceq c$. したがって $x=c$ となる．この c が求めるものであった． □

■応用: 濃度の比較 以下の定理は，任意の二つの集合 X, Y に対して $|X|\leqq|Y|$ または $|Y|\leqq|X|$ が成り立つことを示している．

定理 5.7. 集合 X,Y に対して，単射 $f\colon X\to Y$ が存在するか単射 $g\colon Y\to X$ が存在する．

一般に，集合 X から集合 Y への写像 $f\colon X\to Y$ が与えられると，そのグラフ
$$\mathrm{graph}(f)=\{(x,f(x))\in X\times Y\mid x\in X\}\subset X\times Y$$
が定まる．逆に，$X\times Y$ の部分集合 G に対して
$$\pi_X|_G\colon G\ni(x,y)\longmapsto x\in X$$
が全単射ならば，写像 $f\colon X\to Y$ でそのグラフが G となるものがただ一つ存在する．とくに f が全射 (単射) であるための必要十分条件は $\pi_Y|_G\colon G\to Y$ が全射 (単射) となることである．

定理 5.7 の証明. 集合 S を
$$\mathcal{S}:=\bigcup_{(A,B)\in(\mathfrak{P}(X)\times\mathfrak{P}(Y))}\{\Gamma\subset A\times B\,;\pi_X|_\Gamma\colon\Gamma\to A,\ \pi_Y|_\Gamma\colon\Gamma\to B \text{ は全単射 }\}\subset\mathfrak{P}(X\times Y)$$
とすると，S は集合の包含関係に関して帰納的順序集合となる．実際，$\mathcal{G}\subset\mathcal{S}$ を空でない全順序部分集合とし，
$$G_0:=\bigcup_{G\in\mathcal{G}}G,\qquad X_0:=\bigcup_{G\in\mathcal{G}}\pi_X(G),\qquad Y_0:=\bigcup_{G\in\mathcal{G}}\pi_Y(G)$$
とおく．この G_0 が $\mathcal{G}$ の上界となる．実際，
$$\pi_X(G_0)=\pi_X\left(\cup_{G\in\mathcal{G}}G\right)=\cup_{G\in\mathcal{G}}\pi_X(G)=X_0,\qquad \pi_Y(G_0)=Y_0$$
なので $\pi_X|_{G_0}:G_0\to X_0$, $\pi_y|_{G_0}:G_0\to Y_0$ は全射．また (x_1,y_1), $(x_2,y_2)\in G_0$ ならば $(x_1,y_1)\in G$, $(x_2,y_2)\in G'$ (G, $G'\in\mathcal{G}$) と書けるが，$\mathcal{G}$ が包含関係に関して全順序集合だから (x_1,y_1), $(x_2,y_2)\in G$ として一般性を失わない．すると $\pi_X|_G$ は単射であるから $\pi_X(x_1,y_1)=\pi_X(x_2,y_2)$ ならば $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.

すなわち $\pi_X|_{G_0}$ の単射性が言えた．同様に $\pi_Y|_{G_0}$ も単射．以上より G_0 上で π_X, π_Y がともに全単射なので，$G_0 \in \mathcal{S}$. とくに $G \subset G_0$ $(G \in \mathcal{G})$ なので G_0 は $\mathcal{G}$ の上界である．

簡単のため $X, Y \neq \emptyset$ とすると $\mathcal{S}$ は空集合でない．実際，1点からなる集合 $\{(x,y)\}$ $(x \in X, y \in Y)$ は $\mathcal{S}$ の要素である．したがってツォルンの補題から $\mathcal{S}$ の極大元 G_m が存在する．この G_m に対して $\pi_X(G_m) = X$ であるか，$\pi_X(G_m) = Y$ が成り立つ．実際，$\pi_X(G_m) \subsetneq X$, $\pi_X(G_m) \subsetneq Y$ として $(a,b) \in X \times Y$ を $a \notin \pi_X(G_m)$, $b \notin \pi_Y(G_m)$ となるようにとると $G'_m := G_m \cup \{(a,b)\}$ とおくと $G'_m \in \mathcal{S}$ かつ $G_m \subsetneq G'_m$ なので G_m の極大性に反する．

もし $\pi_X(G_m) = X$ ならば，証明の前に注意したことから写像 $f\colon X \to Y$ が存在する．とくに $\pi_Y(G_m)$ は単射だから，この写像は単射である．同様に $\pi_Y(G_m) = Y$ ならば単射 $g\colon Y \to X$ が存在する． □

■整列可能性定理

定義 5.8. 順序集合 $(X, \preceq)$ が**整列集合**であるとは，X の任意の部分集合が最小元をもつことである．

整列集合は全順序集合である．実際，$(X, \preceq)$ が整列集合 $\{x, y\} \subset X$ とすると x または y はこの部分集合の最小元だから $x \preceq y$ または $y \preceq x$ が成り立つ．

定理 5.9. 任意の集合 X には $(X, \preceq)$ が整列集合になるような順序 $\preceq$ を入れることができる．

証明： $\mathcal{S} := \{(A, R) \,|\, R$ は $A \subset X$ の順序関係で (A, R) は整列集合 $\}$ とする．さらに $(A, R), (A', R') \in \mathcal{S}$ に対して $(A, R) \preceq (A', R')$ を，ある $a \in A'$ に対して $A = \{x \in A' \,;\, x \preceq_{R'} a\} \cap A'$, $R = R'|_A$ となることと定義すると，$\mathcal{S}$ は帰納的順序集合となる．その極大元 (X_m, R_m) をとると $X_m = X$ となり，R_m がもとめる順序関係である．

■選択公理との関連　ツォルンの補題は選択公理を用いて証明されたが，逆にツォルンの補題を認めると選択公理を導くことができる．この意味で，選択公理とツォルンの補題は同値である．実際，整列可能性定理 5.9 を用いると，選択公理は次のようにして示すことができる：空でない集合からなる集合族 $\{X_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ に対して $Y := \cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に整列集合となるような順序を入れ，$g(\lambda)$ を $X_\lambda \subset Y$ の最小元とすれば $g : \Lambda \to Y$ は直積集合の元を与える．

問題

5-1 ツォルンの補題から整列可能性定理を示す手順をきちんと実行しなさい．

5-2 体 k 上のベクトル空間 V の**基底**とは，V の部分集合 B で次の条件を満たすものである：

- 任意の B の有限部分集合 $\{b_1, \ldots, b_m\}$ は k 上線形独立.
- 任意の V の元 v は，B の有限個の元 $\{b_1, \ldots, b_m\}$ の線形結合で表すことができる．

任意のベクトル空間 V には基底が存在することを, 集合

$$\mathcal{S} := \left\{ (W, b) \;\middle|\; \begin{array}{l} W \subset V \text{ は } V \text{ の線形部分空間で} \\ b \text{ は } W \text{ の基底} \end{array} \right\}$$

に $(W_1, b_1) \preceq (W_2, b_2)$ を $W_1 \subset W_2$ かつ $b_1 \subset b_2$ で順序関係を定義したものにツォルンの補題を適用することにより示しなさい．

6 同値関係・商集合

■同値関係

定義 6.1. 集合 X の二項関係 $\sim$ が**同値関係**であるとは, 次が成り立つことである：

- 任意の $x \in X$ に対して $x \sim x$,
- 任意の $x, y \in X$ に対して $x \sim y$ ならば $y \sim x$,
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$.

例 6.2.
- $X \ni x, y$ に対して $x \sim y$ を $x = y$ で定めると，これは同値関係である (**自明な同値関係**).
- 写像 $f \colon X \to Y$ に対して $x \sim_f y$ を $f(x) = f(y)$ となること，と定義するとこれは同値関係である．これを, 写像 f が**誘導する同値関係**という．

例 6.3 (群作用が導く同値関係)**.** G を群とする．すなわち演算 $\cdot \colon G \times G \to G$ が定義されて次を満たしている：(1) 任意の $a, b, c \in G$ に対して $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. (2) ある $e \in G$ が存在して，任意の $a \in G$ に対して $a \cdot e = e \cdot a = a$. (3) 任意の $a \in G$ に対して $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ となる $a^{-1} \in G$ が存在する．

集合 X から X への全単射全体の集合を $\mathcal{F}_X$ と書くことにする．群 G の集合 X への作用とは，写像 $\rho \colon G \to \mathcal{F}_X$ で次を満たすものである：$\rho(e) = \mathrm{id}_X$ かつ $\rho(a \cdot b) = \rho(a) \circ \rho(b)$[*14].

いま，群 G の集合 X への作用 ρ が与えられているとき，$x \sim_G y$ であることを，$y = \rho(g)(x)$ となる $g \in G$ が存在することと定めるとこれは同値関係である．

■商集合

命題 6.4. 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとする．このとき，写像 $q \colon X \ni x \mapsto \{y \in X \mid x \sim y\} \in \mathfrak{P}(X)$ を考えると，任意の x_1, x_2 に対して $q(x_1) = q(x_2)$ または $q(x_1) \cap q(x_2) = \emptyset$ である．とくに，前者のための必要十分条件は $x_1 \sim x_2$ である．

> **証明：** $q(x_1) \cap q(x_2) \ni y_0$ とすると $x_1 \sim y_0$ かつ $x_2 \sim y_0$ だから $x_1 \sim x_2$．このとき，任意の $y_1 \in q(x_1)$ に対して $x_1 \sim y_1$ が成り立つから $x_1 \sim x_2$ から $x_2 \sim y_1$．したがって $y_1 \in q(x_2)$ となるので $q(x_1) \subset q(x_2)$．同様に $q(x_2) \subset q(x_1)$ なので $q(x_1) = q(x_2)$.

定義 6.5. 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとき，命題 6.4 の写像 q の像 $q(X)$ を (X の $\sim$ による) **商集合**といい， $X/\sim$ とかく．このとき，全射 $q \colon X \to X/\sim$ を**射影**, $x \in X$ に対して $q(x)$ を x の**同値類**とよぶ．x の同値類はしばしば $[x]$ と書かれる．

例 6.6. 空でない集合 X, Y の直積 $X \times Y$ 上の同値関係を $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x = x'$ で定義する．このとき，$y_0 \in Y$ を固定して $\iota \colon X \ni x \longmapsto [(x, y_0)] \in X \times Y/\sim$ とすると ι は全単射.

■誘導写像 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとし，商集合への射影を $q \colon X \to X/\sim$ とする．

2011 年 5 月 17 日 (2011 年 6 月 21 日訂正)

[*14] 一般に $\mathcal{F}_X$ は写像の合成を演算として群になる．このとき ρ が G の X への作用とは，G から $\mathcal{F}_X$ の準同型のことである．とくに $\rho(e) = \mathrm{id}_X$, $\rho(g^{-1}) = \{\rho(g)\}^{-1}$ が成り立つ．

命題 6.7. 写像 $f\colon X \to Y$ が "$x \sim y$ ならば $f(x) = f(y)$" を満たしているとする．全射 $\bar{f}\colon X/\sim \to f(X) \subset Y$ で $f = \iota \circ \bar{f} \circ q$ となるものがただ一つ存在する．ただし $\iota\colon f(X) \to Y$ は包含写像である．とくに $\bar{f}$ が全単射になるための必要十分条件は $f(x) = f(y)$ ならば $x \sim y$ が成り立つ，すなわち，f が誘導する同値関係が $\sim$ と一致することである．

> **証明：** $[x] \in X/\sim$ に対して $q(x) = [x]$ となる $x \in X$ を一つとり $y = f(x)$ とする．もう一つ $q(x') = [x]$ となる x' をとると $x \sim x'$ なので $f(x') = f(x) = y$．したがって y の値は $[x]$ を定めるとただ一つ定まる．これを $\bar{f}([x])$ とすれば，それが求める写像である．

定義 6.8. 命題 6.7 の $\bar{f}$ を f が誘導する写像という．

例 6.9. 写像 $f\colon \boldsymbol{R} \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in \boldsymbol{R}^2$ が誘導する $\boldsymbol{R}$ の同値関係を $\sim$ と書く．すると $x \sim y$ であるための必要十分条件は $y - x$ が 2π の整数倍となることである．このとき，次の誘導写像は全単射：

$$\bar{f}\colon \boldsymbol{R}/\sim \longrightarrow f(\boldsymbol{R}) = S^1 = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \subset \boldsymbol{R}^2.$$

いま，加群 $\boldsymbol{Z}$ の $\boldsymbol{R}$ への作用を $\rho(n)(x) = x + 2\pi n$ $(n \in \boldsymbol{Z}, x \in \boldsymbol{R})$ と定めると，この作用が誘導する同値関係は $\sim$ と一致する．この意味で $S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ と書くことがある．

例 6.10.

- 自然数全体の集合を $\boldsymbol{N}$ とし，$\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ の二項関係

$$(x,y) \sim (x',y') \qquad \Leftrightarrow \qquad x + y' = x' + y$$

  は同値関係である．これは，写像 $f\colon \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \ni (x,y) \mapsto x - y \in \boldsymbol{Z}$ ($\boldsymbol{Z}$ は整数全体の集合) から誘導される同値関係で，全単射 $\bar{f}\colon (\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N})/\sim \to \boldsymbol{Z}$ を与える．
- 整数全体の集合を $\boldsymbol{Z}$ とし，$\boldsymbol{Z} \times (\boldsymbol{Z} \setminus \{0\})$ の同値関係を

$$(x,y) \sim (x',y') \qquad \Leftrightarrow \qquad xy' = x'y$$

  で定めると，$\big(\boldsymbol{Z} \times (\boldsymbol{Z} \setminus \{0\})\big)/\sim$ と $\boldsymbol{Q}$ (有理数全体の集合) の間の全単射が存在する．

問題

6-1 X の同値関係は $X \times X$ のどのような部分集合か．

6-2 例 6.3 の関係 $\sim_G$ が同値関係になることを示しなさい．同値関係の性質の各々が，群演算の性質とどのように対応しているかを観察しなさい．

6-3 正の整数 n を一つ固定する．整数 x, y に対して $x - y$ が n で割り切れるとき x と y は n を法として合同である，といい，$x \equiv y \pmod{n}$ と書く．

- "n を法として合同である" という関係は $\boldsymbol{Z}$ の同値関係であることを示しなさい．
- この同値関係による $\boldsymbol{Z}$ の商集合を $\boldsymbol{Z}_n$ あるいは $\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$ と書く．$\boldsymbol{Z}_n$ の要素の個数はいくつか．
- 写像 $\alpha\colon \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} \ni (x,y) \longmapsto [x+y] \in \boldsymbol{Z}_n$ は $[\alpha]\colon \boldsymbol{Z}_n \times \boldsymbol{Z}_n \to \boldsymbol{Z}_n$ を誘導することを確かめなさい．とくに $x, y \in \boldsymbol{Z}$ の同値類 $[x]$, $[y]$ に対して $[\alpha]([x],[y])$ を $[x] + [y]$ と書くことにする．
- 写像 $\mu\colon \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} \ni (x,y) \longmapsto [xy] \in \boldsymbol{Z}_n$ は $[\mu]\colon \boldsymbol{Z}_n \times \boldsymbol{Z}_n \to \boldsymbol{Z}_n$ を誘導することを確かめなさい．この $[\mu]([x],[y])$ を $[x][y]$ と書くことにする．
- 0 と n を法として合同でない整数 x を一つ固定し，写像 $\boldsymbol{Z}_n \ni \xi \longmapsto [x]\xi \in \boldsymbol{Z}_n$ を考える．この写像が全単射になるのはどんなときか．

7　実数の性質とユークリッド距離

7.1　実数の性質

■実数　実数の構成は他の講義 (たぶん解析学) に委ねるが，ここでは実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ の性質をいくつかまとめておく：

- $\boldsymbol{R}$ には加減乗除の演算が定義されており，しかるべき性質をみたしている[*15].
- 大小関係 “$\leqq$” という全順序が定義されている.
- 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ の部分集合だが, 実数 $a, b \in \boldsymbol{R}$ が $a < b$ を満たすならば，$a < x < b$ を満たす有理数 x が存在する[*16]

ここに挙げた性質は有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ も満たしていることに注意する．$\boldsymbol{R}$ が $\boldsymbol{Q}$ より真に大きい集合である，ということを述べているのが次の**実数の連続性**である.

■有界な部分集合

定義 7.1. 実数の部分集合 $X \subset \boldsymbol{R}$ が**上に有界**であるとは，次の条件を満たす実数 m が存在することである：任意の $x \in X$ に対して $x \leqq m$. このような m を X の**上界**という.

一般に m が X の上界ならば，m 以上の実数は X の上界である．X の上界全体の集合が最小値をもつとき，その最小値 m_0 を X の**上限**といい，$\sup X$ と表す.

注意 7.2. 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ に対しても有界性, 上界, 上限が定義される．たとえば, $Y := \{x \in \boldsymbol{Q} \mid x^2 \leqq 2\}$ は上に有界な $\boldsymbol{Q}$ の部分集合である．実際，$Y \ni x$ に対して $x \geqq 1$ なら $x \leqq x^2 \leqq 2$ なので Y は上に有界で, 2 はその上界である．しかし，その上限は $\boldsymbol{Q}$ には存在しない.

ここで，実数の連続性として次を成り立つものとして話をすすめる：

公理 7.3 (実数の連続性). $\boldsymbol{R}$ の上に有界な部分集合は上限をもつ.

■単調列の収束　実数の数列 $\{a_n\}$ が上に有界である，とはそのすべての項を集めた $\boldsymbol{R}$ の部分集合が上に有界となることである.

また，数列 $\{a_n\}$ が**単調非減少**であるとは，任意の番号 $j = 1, 2, \ldots$ に対して $a_j \leqq a_{j+1}$ が成り立つことである.

定義 7.4. 一方，数列 $\{a_n\}$ が実数 a に**収束する**とは，任意の正の数 ε に対して，次を満たす番号 N が存在することである：

$$n \geqq N \qquad \text{ならば} \qquad |a_n - a| < \varepsilon.$$

2011 年 5 月 24 日 (2011 年 5 月 31 日訂正)

[*15] それはなんですか，と訊かないこと．代数学の言葉では “体をなす” ということだが，小学校以来用いている算術の法則が成り立つということである.

[*16] このことを $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ の**稠密** (ちょうみつ，またはちゅうみつ) な部分集合である，という.

このとき a は $\{a_n\}$ の**極限値**であるといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

と書く．

注意 7.5. 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば，その極限値はただひとつしかない．実際，$\{a_n\}$ が a と b に収束すると仮定すると，

$$|b-a| = |b-a_n+a_n-a| \leqq |b-a_n| + |a_n-a| = |a_n-b| + |a_n-a|.$$

ここで，任意の正の数 ε に対して $n \geqq N$ なら $|a_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|a_n-a| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つような N をとることができるので，任意の ε に対して $|b-a| < \varepsilon$．したがって $b=a$．

次が成り立つ．

定理 7.6. 実数の有界な単調非減少数列は収束する．

注意 7.7. いま，$\{p_n\}$ を，0 から 9 までの自然数の列とする．

$$x_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{10^j} \qquad (n=1,2,\dots)$$

と定めると，$\{x_n\}$ は単調非減少数列である．一方，任意の n に対して

$$x_n \leqq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} \leqq \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} \leqq 1.$$

したがって $\{x_n\}$ は上に有界なので，極限をもつ．これが，無限小数

$$0.p_1p_2p_3\dots$$

が表す実数である．

■コーシー列

定義 7.8. 数列 $\{a_n\}$ が**コーシー列**であるとは，任意の正の数 ε に対して，次をみたす番号 N が存在することである：

$$m,n \geqq N \qquad \text{ならば} \qquad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

補題 7.9. コーシー列は有界である．

証明: コーシー列 $\{a_n\}$ に対して, 番号 N を $|a_m-a_n| < 1$ $(m,n \geqq N)$ となるようにとる．すると, $n \geqq N$ ならば $|a_n| = |a_n-a_N+a_N| \leqq 1+|a_N|$ である．したがって, 任意の n に対して $|a_n|$ は $\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N|+1\}$ の最大値を超えない．

定理 7.6 を用いると次が示せる：

定理 7.10. コーシー列は収束する．

7.2 ユークリッド距離

■ユークリッド内積・ノルム・距離　ここでは，正の整数 n に対して

$$\boldsymbol{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,|\, x_1, \dots, x_n \in \boldsymbol{R}\}$$

とする．$\boldsymbol{R}^n$ の要素 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ をベクトルとして表す場合は，しばしば列ベクトルを用いて表す．このことを明示するために転置の記号を用いて $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ などと書くこともある．$\boldsymbol{R}^n$ は実数を係数体とするベクトル空間 (線形空間) とみなすことができる．

定義 7.11 (ユークリッド内積)**.** 実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ の**標準内積**または**ユークリッド内積**とは，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \dots, y_n)$ に対して

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$$

によって実数を与える写像

$$\langle\ ,\ \rangle : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \ni (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longmapsto \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \in \boldsymbol{R}$$

のことである．

とくに，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geqq 0$ だから

$$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$$

によって与えられる写像 $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を**ユークリッド・ノルム**という．

■ユークリッド距離と極限

定義 7.12 (ユークリッド距離)**.** 2 点 $P = (p_1, \dots, p_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$d(P, Q) := |\overrightarrow{PQ}| = |Q - P| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2}$$

で与えられる写像 $d\colon \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の**ユークリッド距離**という．

ユークリッド内積・ノルム・距離が与えられていると考えるとき，$\boldsymbol{R}^n$ を n 次元**ユークリッド空間**という．

定理 7.13. ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ のユークリッド距離 d は次を満たす：

- 任意の $P, Q \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $d(P, Q) \geqq 0$．等号は $P = Q$ のとき，そのときに限り成り立つ．
- 任意の $P, Q \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $d(P, Q) = d(Q, P)$．
- 任意の $P, Q, R \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $d(P, R) \leqq d(P, Q) + d(Q, R)$．

定理 7.13 の第 3 の性質を**三角不等式**という．

■点列の収束　ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $\{P_k\}$ が点 P に**収束する**とは

$$\lim_{n \to \infty} d(P_k, P) = 0$$

が成り立つことである．ただし d はユークリッド距離である．このとき “$\{P_k\}$ の極限は P である” といい，“$\lim_{k\to\infty} P_k = P$” とかく．

補題 7.14. ユークリッド空間の点列 $\{P_k\}$ が収束するとき，その極限は一意的である．

ユークリッド空間の点列 $\{P_k\}$ がコーシー列である，とは任意の正の数 ε に対して，次をみたす番号 N が存在することである：

$$m, k \geqq N \qquad \text{ならば} \qquad d(P_m, P_k) < \varepsilon.$$

定理 7.15. ユークリッド空間の点列 $\{P_k\}$ が収束するための必要十分条件は，それがコーシー列となることである．

問題

7-1 下に有界な $\boldsymbol{R}$ の部分集合，下界，下限 ($\inf X$ などと書くことがおおい) の定義をつくりなさい．

7-2 上に有界な有理数の単調非減少数列で，有理数に収束しない例を挙げなさい．

7-3 注意 7.5 で用いた絶対値の性質を列挙しなさい．

7-4 定理 7.6 を次のようにして証明しなさい：

- 上に有界な単調非減少数列 $\{a_n\}$ の項全体からなる集合 A の上界を α とする．
- 任意の正の数 ε に対して $\alpha - \varepsilon < a_N < \alpha$ となる番号 N が存在する．
- $n \geqq N$ のとき $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

7-5 すべての項が有理数であるようなコーシー列で，有理数に収束しないものの例をあげなさい．

7-6 定理 7.10 を，次のようにして示しなさい：

- コーシー列 $\{a_n\}$ は有界であるから，任意の番号 m に対して $A_m = \{a_n \mid n \geqq m\}$ は有界である．
- とくに $b_m = \inf A_m$ とすると，b_m は上に有界な単調非減少数列．その極限値 β が $\{a_n\}$ の極限値である．

7-7 実数を係数とするベクトル空間 V の**内積**とは写像 $V \times V \ni (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \in \boldsymbol{R}$ で次を満たすものである：

- 任意の零ベクトルでない $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$.
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$.
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ と $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ に対して $\langle \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$.

一方，実数を係数とする n 次対称行列 A が**正値行列**であるとは，任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} > 0$ となることである．ここで，$\boldsymbol{x}$ は列ベクトルとみなし，1×1 行列をスカラと同一視している．このとき，次を示しなさい：

- n 次実対称行列 A が正値であるための必要十分条件は A の固有値がすべて正の実数である．
- $\boldsymbol{R}^n$ の任意の内積は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}$ の形にかける．ただし A は正値実対称行列である．

7-8 定理 7.13 を示しなさい．（三角不等式を示すには，内積のコーシー・シュワルツの不等式を用いる.）

7-9 定理 7.15 を示しなさい．(定理 7.10 を用いる.)

8　距離空間の定義と例

■距離空間

定義 8.1. 空でない集合 X に対して，写像 $d\colon X \times X \to \boldsymbol{R}$ が X の**距離** (**距離関数**) であるとは，次の条件を満たすことである：

- 任意の $x, y \in X$ に対して $d(x,y) \geqq 0$．等号は $x = y$ のときで，そのときに限る (正値性).
- 任意の $x, y \in X$ に対して $d(x,y) = d(y,x)$ (対称性).
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して $d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z)$ (三角不等式).

このとき，集合 X と距離関数 d の組 (X, d) を**距離空間**という．

例 8.2.
- $\boldsymbol{R}^m$ のユークリッド距離 d_{E} は距離関数である[*17]．$(\boldsymbol{R}^m, d_{\mathrm{E}})$ を m 次元**ユークリッド空間**という．
- 任意の空でない集合 X に距離を定義することができる．実際，$x, y \in X$ に対して

$$d_{\mathrm{disc}}(x,y) = \begin{cases} 1 & (x \neq y) \\ 0 & (x = y) \end{cases}$$

  と定めると d_{disc} は X 上の距離関数である．これを**離散距離**とよび，(X, d_{disc}) を離散距離空間とよぶ．

■ノルムと距離

定義 8.3. $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 V の**ノルム**とは, 写像 $|| \ ||\colon V \ni \boldsymbol{x} \to ||\boldsymbol{x}|| \in \boldsymbol{R}$ で

- 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $||\boldsymbol{x}|| \geqq 0$．等号は $\boldsymbol{x}$ が零ベクトルのときに成り立ち，その時に限る．
- 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ と $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して $||\lambda \boldsymbol{x}|| = |\lambda| \, ||\boldsymbol{x}||$.
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leqq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$.

を満たすものである．

ノルム $|| \ ||$ が定義されたベクトル空間 $(V, || \ ||)$ を**ノルム空間**という．

定理 8.4. ノルム空間 $(V, || \ ||)$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}||$ と定めると d は V 上の距離となる．

例 8.5.
- $\boldsymbol{R} \ni x$ に対して絶対値 $|x|$ を対応させる写像 $| \ |$ は $\boldsymbol{R}$ のノルムを与える．このノルムから得られる距離は $\boldsymbol{R}$ のユークリッド距離である．
- $\boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ に対して

$$|\boldsymbol{x}|_1 := |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|$$

  とおくと，$| \ |_0$ は $\boldsymbol{R}^m$ のノルムを与える．このノルムから定まる $\boldsymbol{R}^m$ の距離関数を d_1 と書く．
- $\boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ に対して

$$|\boldsymbol{x}|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|\}$$

2011 年 5 月 28 日 (2011 年 6 月 21 日訂正)

[*17] 前回は単に d と書いたが，今回はいろいろな距離と比較するために d_{E} と書くことにする．

とおくと，$|\ |_\infty$ は $\boldsymbol{R}^m$ のノルムを与える．このノルムから定まる $\boldsymbol{R}^m$ の距離関数を d_∞ と書く．

定理 8.6. $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 V の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ (問題 7-7 参照) に対して

$$||\boldsymbol{x}|| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}$$

と定めると，これは V のノルムを与える．

証明： 一般に，内積に関してシュワルツの不等式

$$(*) \qquad |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqq ||\boldsymbol{x}||\,||\boldsymbol{y}||$$

が成り立つ．実際，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なら等号が成り立つが，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ のときは，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y} - \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{||\boldsymbol{x}||^2}\boldsymbol{x} \qquad \text{に対して} \qquad \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \geqq 0$$

という式から $(*)$ がただちに得られる．ノルムの第 1，第 2 の性質は内積の性質からすぐに得られるので第 3 の性質 (三角不等式) を示そう：

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| &= \left(\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle\right)^{1/2} = \left[||\boldsymbol{x}||^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + ||\boldsymbol{y}||^2\right]^{1/2} \\ &\leqq \left[||\boldsymbol{x}||^2 + 2||\boldsymbol{x}||\,||\boldsymbol{y}|| + ||\boldsymbol{y}||^2\right]^{1/2} = ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||. \end{aligned}$$

例 8.7. $\boldsymbol{R}^m$ のユークリッド内積 (第 7 節参照) から定まるノルムはユークリッド・ノルムで，それが定める $\boldsymbol{R}^m$ の距離はユークリッド距離である．

■点列の収束と距離の同値性

定義 8.8. 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に**収束する**とは

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

が成り立つことである．このことを

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

と書く．

ユークリッド空間の場合と同様に次を示すことができる：

補題 8.9. 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ が x に収束し，かつ y に収束するならば $x = y$ である．

定義 8.10. 集合 X 上の 2 つの距離関数 d_1, d_2 が**同値**であるとは，正の定数 A, B で

$$Ad_1(x,y) \leqq d_2(x,y) \leqq Bd_1(x,y) \qquad (x, y \in X)$$

が成り立つものが存在することである．

補題 8.11. 距離が同値である，という関係は，集合 X の距離関数全体の集合の同値関係を与える．

命題 8.12. 集合 X の 2 つの距離 d_1, d_2 が同値であるとする．このとき，X の点列 $\{x_n\}$ が d_1 に関して x に収束することと d_2 に関して x に収束することは同値である．

証明： 正の定数 A, B に対して $Ad_1 \leqq d_2 \leqq Bd_1$ が成り立っているとする．$\{x_n\}$ が d_1 に関して x に収束するならば,

$$0 \leqq d_2(x_n, x) \leqq Bd_1(x_n, x) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

だから $\{x_n\}$ は d_2 に関して x に収束する．逆に $\{x_n\}$ が d_2 に関して x に収束するならば $d_1(x_n, x) \leqq A^{-1}d_2(x_n, x)$ なので $\{x_n\}$ は d_1 に関して x に収束する．

例 8.13. $\boldsymbol{R}^m$ のユークリッド距離 d_{E}, および例 8.5 の d_1, d_∞ は互いに同値である．実際

$$\frac{1}{\sqrt{m}} d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq d_E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq m\, d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が成り立つ.

問題

8-1 定理 8.4 を示しなさい.

8-2 例 8.5 の $|\ |_0$, $|\ |_\infty$ はともに $\boldsymbol{R}^m$ のノルムであることを示しなさい.

8-3 一般に，$p > 1$ となる実数 p をひとつ固定し，$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m)$ に対して

$$|\boldsymbol{x}|_p := \bigl(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_m|^p\bigr)^{1/p}$$

と定めると，$|\ |_p$ は $\boldsymbol{R}^m$ のノルムを与える (証明は少し面倒くさい)．任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m$ に対して

$$\lim_{p \to +\infty} |\boldsymbol{x}|_p = |\boldsymbol{x}|_\infty$$

であることを確かめなさい.

8-4 距離空間 (X, d) の部分集合 $U \subset X$ に対して $d' = d|_{U \times U}$ とすると (U, d') は距離空間である.

8-5 距離空間 (X, d_X),(Y, d_Y) に対して

$$d \colon (X \times Y) \times (X \times Y) \ni \bigl((x_1, y_1), (x_2, y_2)\bigr) \longmapsto d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) \in \boldsymbol{R}$$

は $X \times Y$ の距離を与える．これを d_X と d_Y の直積距離という.

8-6 集合 X の距離関数 d に対して，次で与えられる d_j は距離関数であることを示しなさい.

- $d_1(x, y) = \log\{1 + d(x, y)\}$.
- 単調増加な C^2-級関数 $\varphi\colon [0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ で $\varphi(0) = 0$, $\varphi''(x) < 0$ を満たすものに対して $d_2(x, y) = \varphi\bigl(d(x, y)\bigr)$.

8-7 例 8.13 を確かめなさい.

8-8 $\boldsymbol{R}^m$ のユークリッド距離と離散距離は同値でないことを示しなさい.

8-9 離散距離によって距離が与えられた距離空間 (X, d_{disc}) の点列が収束するとはどういうことか.

8-10 単位球面

$$S^2 := \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1\} \subset \boldsymbol{R}^3 \qquad (\langle\ ,\ \rangle \text{ は } \boldsymbol{R}^3 \text{ の標準内積})$$

の点を $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルとみなす．このとき

- $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in S^2$ に対して $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ と定めると，d_1 は S^2 の距離を与えることを示しなさい．ただし $|\ |$ は $\boldsymbol{R}^3$ のユークリッドノルムである.

- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^2$ に対して $d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \cos^{-1}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$ とすると，d_2 は S^2 の距離を与えることを示しなさい．この距離はどのような幾何学的意味をもつか.
- 距離 d_1, d_2 は同値か.

8-11 二葉双曲面のひとつのピース

$$H^2 := \{\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^3 \mid -(x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 = -1, x_0 > 0\} \subset \boldsymbol{R}^3$$

を考える.

- $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, y_2)$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \cosh^{-1}(x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2)$ とすると d は H^2 の距離を与えることを示しなさい.
- 写像

$$\pi\colon H^2 \ni (x_0, x_1, x_2) \longmapsto \frac{1}{x_0 - x_2}(x_1, 1) \in \boldsymbol{R}^2$$

は H^2 から上半平面 $H_+ = \{(u_1, u_2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid u_2 > 0\}$ への全単射を与えていることを確かめなさい.
- 上半平面 H_+ 上の 2 点 $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ に対して

$$d_H(u, v) := \log \frac{\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} + \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}}{\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} - \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}}$$

と定めると，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H^2$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_H\big(\pi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})\big)$ が成り立つ，すなわち d_H は H_+ の距離を与え，π は距離空間 (H^2, d) から距離空間 (H_+, d_H) への等長写像であることを確かめなさい．このように距離を定義した上半平面 (H_+, d_H) のことを**双曲平面**という.

8-12 実数を成分とする無限数列全体の集合を $\mathcal{S}$ とする．$\mathcal{S}$ の要素 $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ と実数 λ に対して $x + y = \{x_n + y_n\}$, $\lambda x = \{\lambda x_n\}$ とすることにより $\mathcal{S}$ には加法・スカラ倍の演算が定義され，$\boldsymbol{R}$ 上の線形空間となる.

- $l^\infty := \{x = \{x_n\} \in \mathcal{S} \mid \{|x_n|\}$ は有界 $\}$ は $\mathcal{S}$ の線形部分空間であることを示しなさい.
- 数列 $x = \{x_n\} \in l^\infty$ に対して $||x||_\infty = \sup\{|x_n| \mid n = 1, 2, \dots\}$ と定めるとこれは l^∞ のノルムを与えることを確かめなさい.
- $l^1 := \{x = \{x_n\} \in \mathcal{S} \mid \sum |x_n|$ が収束する $\}$ は $\mathcal{S}$ の線形部分空間であることを示しなさい.
- 数列 $x = \{x_n\} \in l^1$ に対して $||x||_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ と定めると，これは l^1 のノルムを与えることを確かめなさい.
- $l^2 := \{x = \{x_n\} \in \mathcal{S} \mid \sum |x_n|^2$ が収束する $\}$ は $\mathcal{S}$ の線形部分空間であることを示しなさい.
- 数列 $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\} \in l^2$ に対して $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ とすると，これは l^2 の内積を与えることを示しなさい．したがって，これはノルム $||\ ||_2$ を誘導する.
- $l^\infty \cap l^1 \cap l^2$ 上で $||\ ||_\infty$, $||\ ||_1$, $||\ ||_2$ が定める距離は同値か.

9　連続関数・連続写像・連続関数の空間

9.1　関数の極限と連続関数 (復習)

ここでは，区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ で定義された実数値関数 $f\colon I \to \boldsymbol{R}$ を考える．

定義 9.1. 関数 $f\colon I \to \boldsymbol{R}$ が $a \in I$ で**連続**であるとは，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つことである．すなわち，任意の正の数 ε に対して，次の条件をみたす正の数 δ が存在することである：

$$|x-a| < \delta \qquad \text{をみたす任意の } x \text{ に対して} \qquad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

関数 f が定義域 I で連続，とは I の各点で**連続**であることとする．

補題 9.2.
- 定数関数は連続である．
- 恒等関数 $f\colon \boldsymbol{R} \ni x \mapsto x \in \boldsymbol{R}$ は連続である．
- 関数 $f, g\colon I \to \boldsymbol{R}$ が $a \in I$ で連続ならば，和 $f+g$, 積 fg も a で連続である．さらに $f(a) \neq 0$ なら逆数 $1/f$ も a で連続である．
- 連続関数の合成は連続である．

定理 9.3 (最大・最小値の定理)**.** 閉区間 $[a,b] \subset \boldsymbol{R}$ で定義された実数値連続関数 $f\colon [a,b] \to \boldsymbol{R}$ は $[a,b]$ で最大値・最小値をとる．すなわち，ある $p, q \in [a,b]$ で $f(p) \leqq f(x) \leqq f(q)$ がすべての $x \in [a,b]$ に対して成り立つようなものが存在する．

定理 9.4 (中間値の定理)**.** 閉区間 $[a,b] \subset \boldsymbol{R}$ で定義された実数値連続関数 $f\colon [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ を満たすならば，$f(c) = 0$ となる $c \in (a,b)$ が存在する．

9.2　連続写像

■ε-近傍

定義 9.5. 距離空間 (X,d) 上の点 p と正の実数 ε に対して，

$$B_p(\varepsilon) := \{q \in X \mid d(p,q) < \varepsilon\} \subset X$$

を p の (距離 d に関する) ε**-近傍**という．

定義 9.6. 距離空間 (X, d_X) から距離空間 (Y, d_Y) への写像 f が**連続である**とは，任意の $a \in X$ と任意の正の数 ε に対して，ある正の数 δ が存在して

$$f\bigl(B_a(\delta)\bigr) \subset \widetilde{B}_{f(a)}(\varepsilon)$$

が成り立つことである．ここで $B_a(\delta)$ は (X, d_X) における a の δ-近傍，$\widetilde{B}_p(\varepsilon)$ は (Y, d_Y) における p の ε-近傍である．

2011 年 5 月 31 日

9.3 例：連続関数の空間

区間 I 上で定義された実数値連続関数全体の集合を

$$C^0(I) := \{f\colon I \to \boldsymbol{R} \,|\, f \text{ は } I \text{ で連続 } \}$$

と書くことにする．任意の $f,\, g \in C^0(I)$ と $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

で関数 $f+g,\, \lambda f$ を定義してやると $f+g,\, \lambda f \in C^0(I)$ で (補題 9.2)，これらの演算によって $C^0(I)$ は線形空間になる．

以下，簡単のため $I = [a,b]$ (閉区間) としておく．

例 9.7.

- 関数 $f \in C^0(I)$ は I で最大値・最小値をとる．そこで

$$||f|| := \max\{|f(x)| \,|\, x \in I\}$$

とすると $||\ ||$ は $C^0(I)$ のノルムを与える．これを $C^0(I)$ の一様ノルムとよぶ．

- 関数 $f \in C^0(I)$ は f で積分可能である．そこで

$$||f||_1 := \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

と定めこれを L^1-ノルムとよぶ．

- 関数 $f,\, g \in C^0(I)$ に対して

$$(f,g) := \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

とすれば，これは $C^0(I)$ の内積を与える．これを L^2-内積，この内積から定まるノルム $||\ ||_2$ を L^2-ノルムと呼ぶ．

問題

9-1 平均値の定理：閉区間 $[a,b]$ で連続かつ開区間 (a,b) で微分可能な関数 f に対して

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c) \qquad a < c < b$$

を満たす c が存在する．このことを，連続関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

が区間 $[a,b]$ で最大値・最小値をとることを用いて証明しなさい．

9-2 平均値の定理を用いて，次のことを示しなさい：

- 区間 I 上で定義された微分可能な関数 f の導関数が恒等的に 0 ならば f は定数である．（ヒント：$a \in I$ を一つ固定し，任意の $x \in I$ に対して区間 $[a,x]$ または $[x,a]$ で平均値の定理を用いる)．

- 区間 I 上で定義された微分可能な関数 f の導関数が I 上でつねに正の値をとるならば f は I で単調増加である．（ヒント：$x_1,\ x_2 \in I$ に対して $[x_1, x_2]$ で平均値の定理を用いる．）

9-3 区間 I 上で定義された関数 f が C^1-級であるとは，I で微分可能で，導関数 f' が連続となることである．開区間 (a,b) で定義された C^1-級関数 f が $c \in (a,b)$ で $f'(c) > 0$ を満たすならば，ある正の数 ε が存在して $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ で f は単調増加である．このことを示し，“f が C^1-級” の仮定を “f が微分可能” に変えると正しくないことを示しなさい．

9-4 $\boldsymbol{R}^2 \ni \boldsymbol{x} = (x_1, x_2),\ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ に対して

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \\ d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|, \\ d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} \end{aligned}$$

により距離 $d_{\mathrm{E}},\ d_1,\ d_\infty$ を定める．これらの距離に関する原点の ε 近傍を図示しなさい．

9-5 $\boldsymbol{R}$ に標準的な距離 (ユークリッド距離) を入れた場合，定義 9.6 の連続性は定義 9.1 で与えた連続性と同じ概念であることを確かめなさい．

9-6 距離空間 $(X, d_X),\ (Y, d_Y),\ (Z, d_Z)$ と連続写像 $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z$ に対して，合成写像 $g \circ f\colon X \to Z$ は連続写像であることを示しなさい．

9-7 例 9.7 を確かめなさい．さらにこれらのノルムから定まる $C^0(I)$ の距離は同値でないことを示しなさい．

9-8 $I = [-\pi, \pi]$ で定義された関数

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \qquad s_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx$$

とすると，$\{c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \dots\}$ は $C^0([-\pi, \pi])$ の L^2-内積に関する正規直交系をなす，すなわちそれぞれのノルムは 1 で，相異なる 2 つは内積が 0，すなわち直交することを確かめなさい．

10 開集合・閉集合

以下，とくに断らない限り，$\boldsymbol{R}^n$ にはユークリッド距離が与えられているものとする．特に $\boldsymbol{R}$ には $d(x,y)=|y-x|$ により距離 (標準的な距離) が定義されているものとしておく．

■開集合 距離空間 (X,d) 上の点 $p \in X$ と正の実数 r に対して $B_p(r)=\{x \in X \,|\, d(p,x)<r\}$ を点 p の (距離 d に関する) r-近傍という．

定義 10.1. 距離空間 (X,d) の部分集合 $U \subset X$ が**開集合** open set である，とは，各 $x \in U$ に対して正の実数 ε で $B_x(\varepsilon) \subset U$ となるものが存在することである．

例 10.2. 距離空間 (X,d) の点 $p \in X$ の r-近傍 $B_p(r)$ は開集合である．このことを示そう．点 $x \in B_p(r)$ とすると，$\delta := d(p,x) < r$ である．そこで $\varepsilon = r-\delta$ とすると ε は正の数で，$B_x(\varepsilon) \subset B_p(r)$ である．実際，$y \in B_x(\varepsilon)$ をとると $d(x,y)<\varepsilon$ なので，三角不等式から

$$d(p,y) \leqq d(p,x)+d(x,y) = \delta + d(x,y) < \delta+\varepsilon = \delta + r - \delta = r.$$

したがって $y \in B_p(r)$.

例 10.3. ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の 1 点からなる集合 $\{p\}$ は開集合でない．これを示すには，任意の正の数 ε に対して $B_p(\varepsilon)$ が $\{p\}$ の部分集合でないことを示せば良い．実際，$p=(p_1,\dots,p_n)$ とするとき，与えられた正の数 ε に対して $q=(p_1+\frac{\varepsilon}{2},p_2,\dots,p_n)$ とすると $d(p,q)=\frac{\varepsilon}{2}$ なので $q \in B_p(\varepsilon)$ であるが，$p \neq q$ なので $q \notin \{p\}$.

注意 10.4. 例 10.3 は，任意の距離空間 (X,d) の一点集合が開集合でない，ということを言っているわけではない．演習問題 10-3 参照.

命題 10.5 (開集合の性質)**.** 距離空間 (X,d) に対して

(1) $\emptyset$, X は開集合である．
(2) 任意の X の開集合族 $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ に対して $\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は開集合である．
(3) 開集合 U_1, U_2 に対して $U_1 \cap U_2$ は開集合である．

命題 10.5 の (3) から有限個の開集合の共通部分は開集合であることがわかる．

例 10.6. 自然数 n に対して $U_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ (開区間) とおくと，U_n は $\boldsymbol{R}$ の開集合 (演習問題 10-1)．集合族 $\{U_n \,|\, n \in \boldsymbol{N}\}$ を考えると

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = (-1,1), \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$$

となり，この集合族の共通部分は開集合ではない（例 10.3)．すなわち，**無限個の開集合の共通部分は開集合とは限らない**.

定義 10.7. 距離空間 (X,d) の部分集合 $U \subset X$ に対して，$p \in X$ が U の**内点**であるとは，ある正の数 ε で $B_p(\varepsilon) \subset U$ となるものが存在することである．

2011 年 6 月 7 日 (2011 年 6 月 21 日訂正)

集合 $U \subset X$ に対して，U の内点全体の集合を U の**内部** とよび，U° と書く．

命題 10.8. 距離空間 (X, d) に対して

- $U \subset X$ に対して U° は U に含まれる最大の開集合である．すなわち，$U^\circ \subset U$ は開集合であり，かつ $V \subset U$ が開集合ならば，$V \subset U^\circ$.
- $U \subset X$ が開集合であるための必要十分条件は U のすべての点が U の内点となること，すなわち $U = U^\circ$ が成り立つことである．

■閉集合

定義 10.9. 距離空間 (X, d) の部分集合 $V \subset X$ が**閉集合**であるとは $V^c = X \setminus V$ が開集合となることである．

命題 10.10. 距離空間 (X, d) の 1 点 $p \in X$ からなる集合 $\{p\}$ は閉集合である．

証明： $U = X \setminus \{p\}$ とおき，$q \in U$ をとり $\varepsilon = d(p, q)$ とおく．$q \neq p$ だから $\varepsilon > 0$ であって，$p \notin B_q(\varepsilon)$．したがって $B_q(\varepsilon) \subset U$ だから U は開集合．

注意 10.11. 例 10.3 と違い，命題 10.10 は任意の距離空間に対して成立する．距離空間を一般化した "位相空間" の中には，1 点集合が閉集合でないものもある．

命題 10.12. 距離空間 (X, d) に対して

(1) $\emptyset$, X は閉集合である．
(2) 任意の X の閉集合族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して $\cap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は閉集合である．
(3) 閉集合 U_1, U_2 に対して $U_1 \cup U_2$ は閉集合である．

定義 10.13. 距離空間 (X, d) の部分集合 $V \subset X$ に対して，$p \in X$ が V の**触点**であるとは，任意の正の数 ε に対して $B_p(\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$ となることである．

集合 $V \subset X$ に対して V の触点全体の集合を V の**閉包** といって $\overline{V}$ と書く．

命題 10.14. 距離空間 (X, d) に対して

- $V \subset X$ に対して $\overline{V}$ は V を含む最小の閉集合である．すなわち $\overline{V} \supset V$ は閉集合であり，かつ $V \subset W \subset \overline{V}$ となる閉集合 W は $W = \overline{V}$ のみである．
- $V \subset X$ が閉集合であるための必要十分条件は $V = \overline{V}$ が成り立つことである．

定義 10.15. 集合 $U \subset X$ に対して，$p \in X$ が U の**境界点**であるとは，U の触点でありかつ $U^c = X \setminus U$ の触点でもあることである．U の境界点全体の集合を ∂U と書き，U の**境界**という．

命題 10.16. 距離空間 (X, d) の部分集合 U に対して

$$U^\circ = U \setminus \partial U, \qquad \overline{U} = U \cup \partial U.$$

■連続写像

定理 10.17. 距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像 $f\colon X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は，任意

の Y の開集合 U に対して $f^{-1}(U)$ が X の開集合となることである．

証明： 写像 f が連続であるとする．開集合 $U \subset Y$ に対して $p \in f^{-1}(U)$ とすると $f(p) \in U$ であるから，U が開集合であることより，ある正の数 ε が存在して $\widetilde{B}_{f(p)}(\varepsilon) \subset U$ が成り立つ．ただし $\widetilde{B}_q(\varepsilon)$ は (Y, d_Y) における q の ε-近傍である．この ε に対して，f の連続性から，ある正の数 δ が存在して $f\bigl(B_p(\delta)\bigr) \subset \widetilde{B}_{f(p)}(\varepsilon) \subset U$ が成り立つ．すなわち

$$B_p(\delta) \subset f^{-1}\left(f\bigl(B_p(\delta)\bigr)\right) \subset f^{-1}(U)$$

となる．p は $f^{-1}(U)$ から任意にとってきたのだから $f^{-1}(U)$ は開集合である．

逆に，任意の開集合 $U \subset Y$ に対して $f^{-1}(U)$ が開集合であったとする．点 $p \in X$ を一つ固定し，正の数 ε を任意にとると，$\widetilde{B}_{f(p)}(\varepsilon)$ は Y の開集合であるから $V := f^{-1}\bigl(\widetilde{B}_{f(p)}(\varepsilon)\bigr)$ は X の開集合．とくに $p \in V$ なので，ある正の数 δ が存在して $B_p(\delta) \subset V$．このとき

$$f\bigl(B_p(\delta)\bigr) \subset f(V) = f\left(f^{-1}\bigl(\widetilde{B}_{f(p)}(\varepsilon)\bigr)\right) \subset \widetilde{B}_{f(p)}(\varepsilon).$$

したがって f は p で連続．$p \in X$ は任意だったから f は連続写像である．

系 10.18. 距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像 $f\colon X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は，任意の Y の閉集合 V に対して $f^{-1}(V)$ が X の閉集合となることである．

問題

10-1 $\boldsymbol{R}$ の開区間は開集合，閉区間は閉集合である．また，区間 $(a, b]$ は開集合でも閉集合でもない．

10-2 集合 X 上の距離 d_1 と d_2 が同値ならば，d_1 に関する開集合は d_2 に関する開集合であり，d_2 に関する開集合は d_1 に関する開集合である．

10-3 集合 X の任意の部分集合は離散距離 d_{disc} に関する開集合であり，かつ閉集合でもある．

10-4 命題 10.5，10.12.

10-5 命題 10.8, 10.14, 10.16.

10-6 距離空間 (X, d) 上の点 p と正の数 ε に対して $U = B_p(\varepsilon)$ とするとき，

$$U^\circ = U = \{x \in X \mid d(p, x) < \varepsilon\}, \qquad \overline{U} = \{x \in X \mid d(p, x) \leqq \varepsilon\}, \qquad \partial U = \{x \in X \mid d(p, x) = \varepsilon\}.$$

10-7 距離空間 (X_1, d_1), (X_2, d_2) の直積 $X_1 \times X_2$ に対して

$$d\bigl((x_1, x_2), (y_1, y_2)\bigr) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \qquad \bigl((x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2\bigr)$$

と定める．

- d は $X_1 \times X_2$ の距離を定める．これを d_1 と d_2 の**直積距離**といい，$d = d_1 \times d_2$ と書く．
- ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{R}^n$ の直積距離は $\boldsymbol{R}^{m+n}$ のユークリッド距離と同値である．
- (X_1, d_1) の開集合 U_1 と (X_2, d_2) の開集合 U_2 に対して $U_1 \times U_2$ は $X_1 \times X_2$ の距離 $d_1 \times d_2$ に関する開集合である．
- $j = 1, 2$ に対して，射影

$$\pi_j\colon X_1 \times X_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto \pi_j(x_1, x_2) = x_j \in X_j$$

  は $(X_1 \times X_2, d_1 \times d_2)$ から (X_j, d_j) への連続写像である．
- 距離空間 (Y, d) から $(X_1 \times X_2, d_1 \times d_2)$ への写像 $f\colon Y \to X_1 \times X_2$ が連続であるための必要十分条件は，射影との合成 $f_1 = \pi_1 \circ f$, $f_2 = \pi_2 \circ f$ がともに連続となることである．

10-8 $\boldsymbol{R}^m$ にはユークリッド距離が与えられているとする．

- $\boldsymbol{R}$ の区間 I から $\boldsymbol{R}$ への写像 (すなわち関数) が微分可能ならば連続である．
- $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U から $\boldsymbol{R}$ への写像 (すなわち m 変数関数) が微分可能ならば連続である．
- $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U から $\boldsymbol{R}^n$ への写像

$$f\colon \boldsymbol{R}^m \supset U \ni (x_1,\dots,x_m) \longmapsto f(x_1,\dots,x_m) = \bigl(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots f_n(x_1,\dots,x_m)\bigr) \in \boldsymbol{R}^n$$

が連続であるための必要十分条件は関数 $f_j\colon U \to \boldsymbol{R}$ $(j=1,\dots,n)$ が連続となることである．

10-9 離散距離空間 (X, d_{disc}) から距離空間 (Y,d) への任意の写像は連続である．

10-10 $\boldsymbol{R}^m$ 上で定義された連続関数 f_1, f_2,$\dots f_n$ に対して

$$U := \{(x_1,\dots,x_m) \in \boldsymbol{R}^m \mid f_j(x_1,\dots,x_m) > 0, j=1,\dots,n\},$$
$$V := \{(x_1,\dots,x_m) \in \boldsymbol{R}^m \mid f_j(x_1,\dots,x_m) \geqq 0, j=1,\dots,n\}$$

とおくと U, V はそれぞれ $\boldsymbol{R}^m$ の開集合，閉集合となる．

10-11 次の例を挙げなさい：距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) に対して，連続写像 $f\colon X \to Y$ で

- X のある開集合 U の像が開集合でないもの．
- X のある閉集合 V の像が閉集合でないもの．

10-12 $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ を，実数を成分とする $m \times n$ 行列全体の集合とする．これは集合としては $\boldsymbol{R}^{mn}$ とみなすことができるのでユークリッド内積 $\langle\ ,\ \rangle$，ユークリッド距離 d を与えることができる．このように内積，距離を与えたとき，

- $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ に対して $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\,{}^tAB = \mathrm{tr}\,A^tB$ である．
- 次の集合は $M_{m,m}(\boldsymbol{R})$ の開集合か，閉集合か．

$$\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}) = \{A \in M_{m,m}(\boldsymbol{R}) \mid A \text{ は正則 }\}.$$
$$\mathrm{SL}(m,\boldsymbol{R}) = \{A \in M_{m,m}(\boldsymbol{R}) \mid \det A = 1\}.$$
$$\mathrm{O}(m,\boldsymbol{R}) = \{A \in M_{m,m}(\boldsymbol{R}) \mid A \text{ は直交行列 }\}.$$

- $\bigl(M_{m,m}(\boldsymbol{R}) \setminus \mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R})\bigr)^\circ$ を求めなさい．

11　同相写像・連結性

今回も，とくに断りのない限り $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R}^n$) には標準的な距離 (ユークリッド距離) が与えられているものとする．

■閉集合について (前回の補足)　この講義では，距離空間 (X,d) の部分集合 $V \subset X$ が閉集合である，とは V^c が開集合である，と定義した (定義 10.9).

定理 11.1. 距離空間 (X,d) の部分集合 $V \subset X$ が閉集合であるための必要十分条件は，任意の V の点からなる収束する点列の極限が V の点となることである．

証明： 必要性：閉集合 V の点からなる点列 $\{x_n\}$ が $\xi \in V^c$ に収束するとする．すると，V^c は開集合であるから，ある正の数 ε が存在して $B_\xi(\varepsilon) \subset V^c$．ここで $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ であるから上でとった ε に対してある番号 N が存在して $n \geqq N$ ならば $d(x_n,\xi) < \varepsilon$．したがってこのような n に対して $x_n \in B_\xi(\varepsilon) \subset V^c$．これは $x_n \in V$ であることに矛盾する．したがって収束する V の点列の極限は V の点である．
十分性：対偶をしめす．V が閉集合でないと仮定して V の収束する点列 $\{x_n\}$ でその極限 ξ が V^c の点であるものを構成すればよい．仮定より．V^c は開集合でないから，ある $\xi \in V^c$ が存在し，任意の正の数 ε に対して $B_\xi(\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$．そこで，正の整数 n に対して $x_n \in B_\xi(\frac{1}{n}) \cap V$ となる x_n をひとつとる．すると $\{x_n\}$ は V の点列であって，$d(x_n,\xi) < \frac{1}{n}$ となるから $\lim_{n\to\infty} d(x_n,\xi) = 0$．したがって V の点列 $\{x_n\}$ は $\xi \in V^c$ に収束する．

このことから，“任意の収束する V の点列の極限値が V の点である” ことを距離空間の閉集合の定義として採用してもよい．

■部分距離空間　距離空間 (X,d) の空でない部分集合 $Y \subset X$ に対して，距離 d を $Y \times Y$ に制限したものを d_Y と書けば d_Y は Y の距離を与える．このようにして得られた (Y,d_Y) を (X,d) の**部分距離空間**という．

例 11.2. 単位球面 $S^2 \subset \boldsymbol{R}^3$ に $d(x,y) = |y-x|$ $(x,y \in S^2)$ により距離を定義すると，(S^2,d) はユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の部分距離空間である．(問題 8-10 の d_1 がここでいう d である).

補題 11.3. 距離空間 (X,d) の部分距離空間 (Y,d_Y) に対して，$U \subset Y$ が開集合 (閉集合) であるための必要十分条件は，X の開集合　(閉集合) $\hat{U} \subset X$ が存在して $U = \hat{U} \cap Y$ となることである．

証明： (X,d) の点 p の ε 近傍を $B_p(\varepsilon)$, (Y,d_Y) の点 q の ε 近傍を $B'_q(\varepsilon)$ と書くことにする．とくに $q \in Y$ ならば

$$B'_q(\varepsilon) = \{x \in Y \mid d_Y(q,x) < \varepsilon\} = \{x \in Y \mid d(q,x) < \varepsilon\} = \{x \in X \mid d(q,x) < \varepsilon, x \in Y\} = B_q(\varepsilon) \cap Y$$

が成り立つ．
集合 $U \subset Y$ が (Y,d_Y) の開集合ならば，各点 $y \in U$ に対して，正の数 ε_y で $B'_y(\varepsilon_y) \subset U$ となるものが存在する．そこで，この ε_y を用いて

$$\hat{U} := \bigcup_{y \in Y} B_y(\varepsilon_y)$$

とすると，これは X の開集合で $U = \hat{U} \cap Y$．

2011 年 6 月 14 日 (2011 年 6 月 21 日訂正)

一方，X の開集合 $\hat{U}$ に対して $U=\hat{U}\cap Y$ とする．すると，任意の $y\in U\subset\hat{U}$ に対して，$\hat{U}$ が開集合であることから，X における近傍 $B_y(\varepsilon)$ が $\hat{U}$ の部分集合になるような ε が存在する．このとき，

$$B'_y(\varepsilon)=B_y(\varepsilon)\cap Y\subset\hat{U}\cap Y=U$$

であるから U は開集合である．
閉集合の場合は，補集合をとれば開集合の場合に帰着される．

例 11.4. $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $Y=[0,1]$ を部分距離空間とみなすとき，区間 $(\frac{1}{2},1]$ は Y の開集合である．

■同相写像

定義 11.5. 距離空間 (X_1,d_1), (X_2,d_2) に対して，写像 $f\colon X_1\to X_2$ が全単射，かつ f も f^{-1} もともに連続であるとき f は**同相写像**であるといい，このような写像が存在するとき二つの距離空間 (X_1,d_1), (X_2,d_2) は**同相**であるという．

例 11.6. $\boldsymbol{R}$ に標準的な距離 d を与えた距離空間 $(\boldsymbol{R},d)$ と離散距離を与えた距離空間 $(\boldsymbol{R},d_{\mathrm{disc}})$ を考える．恒等写像 $\mathrm{id}\colon(\boldsymbol{R},d_{\mathrm{disc}})\to(\boldsymbol{R},d)$ は全単射かつ連続であるが，その逆写像は連続でない．

■連結性

定義 11.7. 距離空間 (X,d) が**連結**である，とは，次をみたす X の部分集合の組 (A,B) が存在しないことである：

- $A\neq\emptyset$ かつ $B\neq\emptyset$.
- A, B は X の開集合.
- $A\cup B=X$,
- $A\cap B=\emptyset$.

定義 11.7 のような A, B が存在するならば $B=A^c$ だから A，B はともに開かつ閉でなければならない．

命題 11.8. 距離空間 (X,d) が連結であるための必要十分条件は，X の開かつ閉部分集合が $\emptyset$ と X のみとなることである．

■$\boldsymbol{R}$ の区間　実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ の部分集合 I が**区間**であるとは，a, $b\in I$ $(a\leqq b)$ ならば $a\leqq x\leqq b$ をみたす任意の x は I の点となることである．実数 a, b $(a<b)$ に対して次の集合は区間である：

$$\begin{aligned}
&(a,b)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,a<x<b\} && (a,b]=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,a<x\leqq b\}\\
&[a,b]=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,a\leqq x\leqq b\} && [a,b)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,a\leqq x<b\}\\
&(a,\infty)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,a<x\} && (-\infty,a)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x<a\}\\
&[a,\infty)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,a\leqq x\} && (-\infty,a]=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x\leqq a\}\\
&(-\infty,\infty)=\boldsymbol{R}.
\end{aligned}\tag{11.1}$$

なお $\pm\infty\notin\boldsymbol{R}$ なので $[-\infty,a]$ などは意味をもたない．

命題 11.9. $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $X\subset\boldsymbol{R}$ が (部分距離空間として) 連結であるための必要十分条件は X が区間となることである．

■弧状連結性　区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ から距離空間 (X,d) への連続写像

$$\gamma\colon I \ni t \longmapsto \gamma(t) \in X$$

を X の**道**という．とくに I が閉区間 $[a,b]$ であるとき，$\gamma(a)$, $\gamma(b)$ をそれぞれ γ の始点，終点とよぶ．

定義 11.10. 距離空間 (X,d) が**弧状連結** である，とは任意の $a, b \in X$ に対して，始点が a, 終点が b となる X の道が存在することである．

命題 11.11. 距離空間 (X,d) が弧状連結ならば連結である．

証明. 定義 11.7 のような二つの開集合 A, B が存在したとして，$p \in A$, $q \in B$ をとる．弧状連結性から，道 $\gamma\colon [0,1] \to X$ で $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ となるものが存在する．いま，

$$I_A := \{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in A\} = \gamma^{-1}(A), \qquad I_B := \{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in B\} = \gamma^{-1}(B)$$

とすると, I_A, I_B は $\boldsymbol{R}$ の空でない部分集合で，$I_A \cup I_B = [0,1]$, $I_A \cap I_B = \emptyset$ となる． さらに γ の連続性から I_A, I_B は $[0,1]$ の開集合であるから, 区間の連結性に矛盾する． □

注意 11.12. $\boldsymbol{R}^n$ の開部分集合 X が連結ならば弧状連結である．しかし，一般には連結性から弧状連結性は導かれない (そのような例がある)．詳細は “集合と位相第二” で扱う (はず).

■連続写像と連結性

定理 11.13. 連結な距離空間 (X,d) から 距離空間 (Y,d') への連続写像 $f\colon X \to Y$ による X の像 $f(X) \subset Y$ は連結である．

> **証明：** 像 $f(X)$ の部分集合 A, B が定義 11.7 の性質を満たしているとする．このとき $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ は X の空でない開集合で，$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$, $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$ となり矛盾.

系 11.14 (中間値の定理)**.** 閉区間 $[a,b] \subset \boldsymbol{R}$ 上で定義された連続関数 $f\colon [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が $f(a) < f(b)$ を満たしているとする．このとき $f(a) < c < f(b)$ を満たす任意の実数 c に対して $f(\xi) = c$ となる ξ $(a < \xi < b)$ が少なくともひとつ存在する．

> **証明：** 命題 11.9 から，区間 $[a,b]$ は連結だから $f([a,b])$ も連結．したがって $f([a,b])$ は $\boldsymbol{R}$ の区間である．したがって $f(a) < c < f(b)$ を満たす任意の c は $f([a,b])$ の要素である．

■領域 (用語)　距離空間 (たとえば $\boldsymbol{R}^n$) の**領域**とは連結な開集合のことである．

問題

11-1 補題 11.3 の閉集合の場合の証明を完全にしなさい．
11-2 集合 X 上の 2 つの距離 d_1, d_2 が同値であるとき，(X,d_1), (X,d_2) は同相である．さらに逆は成立するか.
11-3 開区間 $(0,1)$ と $\boldsymbol{R}$ は同相である．また，閉区間 $[0,1]$ と開区間 $(0,1)$ は同相でない.
11-4 命題 11.8.

11-5 命題 11.9.

11-6 命題 11.11.

11-7 定理 11.13.

11-8 2 以上の整数 m に対して，$\mathrm{M}_{m,m}(\boldsymbol{R})$ を実数を成分とする m 次正方行列全体の集合，

$$\mathrm{O}(m) := \{A \in \mathrm{M}_{m,m}(\boldsymbol{R}) \,|\, A \text{ は直交行列 }\}, \qquad \mathrm{SO}(m) := \{A \in \mathrm{M}_{m,m}(\boldsymbol{R}) \,|\, A \in \mathrm{O}(m), \det A = 1\}$$

とする．$M_{m,m}(\boldsymbol{R})$ にはユークリッド距離が与えられている (問題 10-12) とするとき

- $\mathrm{O}(m)$ は ($\mathrm{M}_{m,m}(\boldsymbol{R})$ の部分距離空間として) 連結でない．
- $\mathrm{SO}(m)$ は連結である．
- $\mathrm{SO}(2)$ は $S^1 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ と同相である．

12　コンパクト性と完備性

とくに断りのない限り $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R}^n$) には標準的な距離 (ユークリッド距離) が与えられているものとする．

■コンパクト距離空間　距離空間 (X,d) の開集合族 $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ が X ($Y \subset X$) の**開被覆**であるとは，$\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = X$ ($\supset Y$) を満たすことである．

定義 12.1. 距離空間 (X,d) が**コンパクト**であるとは，X の任意の開被覆 $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ に対して，添字の有限集合 $\{\lambda_1,\dots,\lambda_N\} \subset \Lambda$ が存在して $\{U_{\lambda_1},\dots,U_{\lambda_N}\}$ が X の開被覆となることである．

定義の条件を，“X の任意の開被覆は有限部分被覆をもつ” ということがある．

注意 12.2. 距離空間 (X,d) の部分集合 Y が X のコンパクト部分集合である，とは，X の部分距離空間としてコンパクトとなることである．これは Y の任意の開被覆が有限部分被覆をもつことと同値である．

例 12.3. $\boldsymbol{R}$ はコンパクトではない．実際，正の整数 n に対して $U_n = (-n,n)$ とおくと $\{U_n \,|\, n \in \boldsymbol{N}\}$ は $\boldsymbol{R}$ の開被覆であるが，有限個で $\boldsymbol{R}$ を覆うことはできない．

■点列コンパクト性　距離空間 (X,d) の点列 $\{x_n \,|\, n = 1,2,\dots\}$ の **部分列**とは，ある自然数の無限列 $n_1 < n_2 < \dots$ に対して $\{x_{n_1}, x_{n_2},\dots,\} = \{x_{n_k} \,|\, k \in \boldsymbol{N}\}$ で与えられる点列のことである．

定理 12.4. コンパクト距離空間 (X,d) の任意の点列は，X 内で収束する部分列をもつ．

証明： コンパクト距離空間 (X,d) の点列 $\{x_n\}$ を考える．もし，ある $\xi \in X$ に対して $x_n = \xi$ となる番号 n が無限個存在するなら，それらを並べれば ξ に収束する $\{x_n\}$ の部分列が得られる．
さらに $x_n = \xi$ となる n が 2 つ以上あるならば，それらは重複を取り除くことにより $\boldsymbol{N} \ni n \mapsto x_n \in X$ は単射であるとしてよい．この写像の像を $Y = \{x_1, x_2, \dots\}$ としておこう．
集合 Y が集積点を持たないと仮定しよう．このとき，$\mathcal{A} := \{U \subset X \,|\, U \text{ は開集合で } \#U \cap Y \leqq 1\}$ とすると，Y が集積点をもたないことから $\mathcal{A}$ は X の開被覆．したがって有限部分被覆 $\{U_1,\dots,U_N\}$ をもつ．$U_1,\dots,U_N$ は Y とたかだか 1 点しか共有しないので，Y は有限集合となり，Y が無限集合となることに矛盾する．
そこで Y の集積点 ξ をとると，任意の番号 n に対して $B_\xi(1/n) \ni x_{m_n}$ なる $x_{m_n} \in Y$ が存在する．このようにして得られた $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{m_n}\}$ は ξ に収束する．

系 12.5. 距離空間 (X,d) の部分集合 Y がコンパクトなら，ば Y は X の閉集合である．

証明： X の点に収束する Y の点列をとると，定理 12.4 よりその極限は Y の点である．したがって Y は閉集合．

■完備性　距離空間 (X,d) の点列 $\{x_n\}$ が**コーシー列**であるとは，任意の正の数 ε に対してある番号 N が存在して $m,n \geqq N \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon$ とできることである．

定義 12.6. 距離空間 (X,d) が**完備** complete であるとは，任意のコーシー列が収束することである．

例 12.7.
- $\boldsymbol{R}$ は完備である．完備性は実数の連続性と同値であった．
- ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ は完備である．
- $\boldsymbol{R}^n \setminus \{1\text{ 点 }\}$ は完備でない．

2011 年 6 月 21 日

- $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間 $(0,1)$ は完備でない．実際 $\{\frac{1}{n+1}\}$ は $(0,1)$ のコーシー列だが $(0,1)$ の中では収束しない．
- $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間 $[0,1]$ は完備である．実際 $[0,1]$ のコーシー列は $\boldsymbol{R}$ のコーシー列でもあるから $\boldsymbol{R}$ のある点に収束する．$[0,1]$ は $\boldsymbol{R}$ の閉部分集合であるから極限は $[0,1]$ の点である．

■完備性とコンパクト性

命題 12.8. コンパクト距離空間は完備である．

証明： コンパクト距離空間 (X,d) のコーシー列 $\{x_n\}$ をとると，定理 12.4 から $\xi \in X$ に収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在する．とくに，任意の正の数 ε に対してある番号 N で "$k \geqq N$ ならば $d(x_{n_k},\xi) < \varepsilon/2$" を満たすものが存在する．一方，$\{x_n\}$ はコーシー列であるから，同じ ε に対して番号 M で "$l, j \geqq M$ ならば $d(x_l, x_j) < \varepsilon/2$" を満たす M が存在する．そこで，$k \geqq N$ かつ $n_k \geqq M$ となるように k をとれば

$$j \geqq M \qquad \Rightarrow \qquad d(x_j,\xi) \leqq d(x_j,x_{n_k}) + d(x_{n_k},\xi) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる．これは $\{x_n\}$ が $\xi \in X$ に収束することを表している．

次の命題は，(たぶん) 後期に紹介されるはずである．

命題 12.9. 完備距離空間の有界閉集合はコンパクトである．

例 12.10. $\boldsymbol{R}$ の閉区間はコンパクトである．

系 12.11. $\boldsymbol{R}$ のコンパクト部分集合は最大元および最小元をもつ．

■コンパクト性と連続写像

定理 12.12. コンパクト距離空間 (X,d) から距離空間 (Y,d') への連続写像 $f\colon X \to Y$ の像 $f(X)$ は Y のコンパクト部分集合である．

証明： 像 $f(Y)$ の開被覆 $\{U_\lambda\}$ をとる．各開集合 $U_\lambda \subset f(Y)$ に対して，Y の開集合 $\tilde{U}_\lambda$ で $U_\lambda = f(Y) \cap \tilde{U}_\lambda$ となるものが存在する．そこで $V_\lambda := f^{-1}(U_\lambda)$ とすると $\{V_\lambda\}$ は X の開被覆になる．この有限部分被覆 $\{V_{\lambda_1},\dots,V_{\lambda_N}\}$ に対して $\{U_{\lambda_1},\dots,U_{\lambda_N}\}$ をとるとこれは $\{U_\lambda\}$ の有限部分被覆である．

系 12.13. 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $f\colon [a,b] \to \boldsymbol{R}$ は，区間 $[a,b]$ 内で最大値，最小値をとる．

例 12.14. $S^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid |\boldsymbol{x}| = 1\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ と同相ではない．

問題

12-1 例 12.10.
12-2 系 12.11.
12-3 系 12.13.
12-4 例 12.14.