

微分積分学第一 (LAS.M101-06)

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

`http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/`

東京工業大学

2024/06/11

講義 読字

微分積分学第一 成積 読字

(LAS.M101-6; Lクラス・U74-80) 読

火曜日 1/2 時限・木曜日 3/4 時限
(講義：担当 山田光太郎)

月曜日 1/2 時限 (演習：担当 斎藤耕太)

義

~~読~~

T2SCHOLA

- ▶ 講義資料
- ▶ 課題
- ▶ 課題提出
- ▶ フィードバック

講義資料は講義前日までに T2SCHOLA にあげるの各各自ダウンロードして参照できるようにしてください。

講義概要

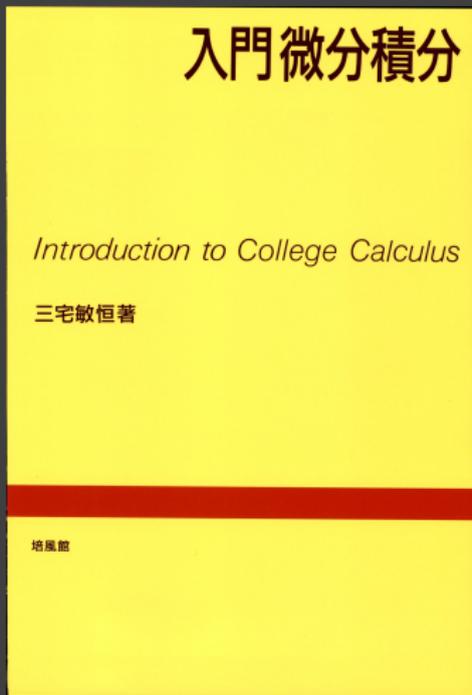
講義の概要

理工系の「掛け算九九」として、微分積分学の基本的事項を学ぶ。

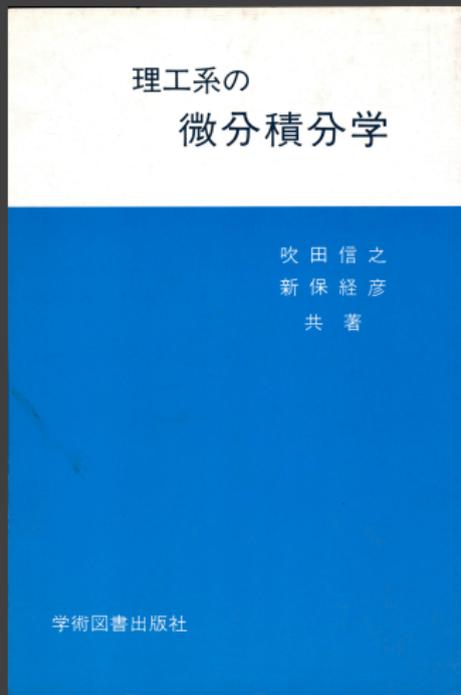
到達目標

多変数関数の微積分の基本的事項を理解し、それらの操作ができる。

お・題・目



教科書



参考書

1. 初等関数の微積分

1.1 1変数関数 (復習)

高等学校で学んだ微分・積分は、関数に対する操作であった。

一般に (ある範囲の) 数 x に対して、1つの数 $f(x)$ を対応させる規則 f を (1変数) 関数¹⁾という。このとき、考える x の範囲を関数 f の定義域、値 $f(x)$ として想定している数の範囲を f の値域という。また、 x が関数 f の定義域全体を動くとき、値 $f(x)$ が動く値域の中の範囲を f の像とよぶ²⁾。

■ 実数の集合と区間 関数の定義域、値域、像を表現するために集合の言葉を復習しよう: 数学的な対象の集まりを集合という³⁾。とくに、実数全体の集合を \mathbb{R} と書く⁴⁾。

一般に対象 x が集合 X の要素であるということ を " $x \in X$ " と表す。たとえば " $x \in \mathbb{R}$ " とは " x は実数全体の集合の要素" すなわち " x は実数" であることを表している。

集合 X のいくつかの要素を集めて得られる集合を X の部分集合という⁵⁾。集合 Y が X の部分集合であることを、記号 $Y \subset X$ と表す⁶⁾。すなわち⁷⁾

$$Y \subset X \iff \forall y \in Y \text{ ならば } y \in X$$

である。

¹⁾2024年06月11日/13日

²⁾関数 (かんすう): a function; 図解からすれば「関数」と書くのが正しいのかも知れない。

³⁾定義域: the domain; 値域: the range; 像: the image.

⁴⁾集合: a set; この説明では集合と集合でないものの区別がつけられないので何も言っていないことになるが、この授業が終了後には、対象が明確に述べられるのでよくにはねることはないはずである。

⁵⁾実数: real numbers; 実数全体の集合: the set of real numbers; \mathbb{R} は文字の "R"。正確では " \mathbb{R} " を用いることもある。実数とは数直線上にのぼる数とかが非なる数のことだということだ。実数の概念を数学的に厳密に定義するまではやむを得ないが、後編「数の微積分第二」でその厳密さを紹介する。

⁶⁾要素: an element; 部分集合: a subset; $X \subset Y$ と $x \in Y$ の区別に注意せよ。

⁷⁾" Y が X の部分集合である" ということを、高等学校の教科書では $Y \subseteq X$ と書くことが多いが、それ以外の世界では $Y \subset X$ と書くのが多量読のようなので、ここでは後者 (高等学校の教科書でもない方) を採用する。この用語では $X \subset X$ は正しい。

⁸⁾記号 " $A \Leftrightarrow B$ " は " A であるための必要十分条件は B "、" A と B 同値"、" A if and only if B "、" A is equivalent to B " と読む。

実数全体の集合 \mathbb{R} の部分集合、すなわち実数の集合で、数直線上のひと続きの部分を表しているものを区間という。区間には次のようなものがある:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\},$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R},$$

$$[a, a] = \{a\}.$$

ただし a, b は $a < b$ をみたす実数である。とくに (a, b) を開区間、 $[a, b]$ を閉区間という⁸⁾。

■ 1変数関数の例

例 1.1. 実数 x に対して実数 x^2 を対応させる対応の規則にいま f という名前をつける。" f は定義域を \mathbb{R} 、値域を \mathbb{R} とする関数である" と考えることができる。引用符で囲んだ部分のことを

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

と書く。また、" f は x を x^2 に対応させる" ということを

$$f: x \mapsto x^2, \quad f(x) = x^2$$

と書く。矢印 " \mapsto " と " \rightarrow " はこのように使い分ける。

この関数 f によって x に対応する値 (数) が $f(x)$ である:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 4, \quad f(a) = a^2, \quad f(a) = a^2, \quad f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2.$$

ここで x が実数全体を動くとき、その値 $f(x)$ は負でない実数全体⁹⁾を動く、したがって f の像は $[0, +\infty)$ となる¹⁰⁾。◇

⁸⁾区間: an interval; 開区間 an open interval; 閉区間: a closed interval. 区間の括弧は他の記号と混ざらわいかもしれない。それを避けるために: (a, b) のことを $]a, b[$ などと書く場合もある。無限大 $+\infty$ は実数ではないので、たとえば $(0, +\infty]$ という表記は避ける。

⁹⁾負でない実数: a nonnegative real number; 負でない実数全体 (the set of nonnegative real numbers) は $[0, +\infty)$ のことを表している。正の実数全体 (the set of positive real numbers) は $(0, +\infty)$ のこと、同様に正でない (負の) 実数全体 (the set of nonpositive (negative) real numbers) はそれぞれ $[-\infty, 0]$ 、 $(-\infty, 0)$ を表す。

¹⁰⁾ここでの " f の像" のことを "値域" という場合もあるがこの講義では例 1.1 のように "像" と "値域" を使い分ける。

授業日程

2024年度(第2四半学期)微積分学第一・演習(LAS.M101-06)授業日程

2024年06月07日 山田寛太郎

| | | 授業内容 | 提出物締切 |
|-------------|------|---|-------------------|
| 2024年06月10日 | | | |
| 2024年06月11日 | I 1 | 初等関数と微積分 §§1.2, 1.3, 2.1 | 2024年06月13日17時00分 |
| 2024年06月13日 | 2 | | |
| 2024年06月17日 | | | |
| 2024年06月18日 | I 3 | 多変数関数・偏微分 §4.1 | 2024年06月20日17時00分 |
| 2024年06月20日 | 4 | | |
| 2024年06月24日 | | | |
| 2024年06月25日 | I 5 | 連続性と微分可能性 §§1.2, 4.2 | 2024年06月27日17時00分 |
| 2024年06月27日 | 6 | | |
| 2024年07月01日 | | | |
| 2024年07月02日 | I 7 | チェイン・ルール §4.2 | 2024年07月04日17時00分 |
| 2024年07月04日 | 8 | | |
| 2024年07月08日 | | | |
| 2024年07月09日 | I 9 | 重積分の考え方 §5.1 | 2024年07月11日17時00分 |
| 2024年07月11日 | 10 | | |
| 2024年07月15日 | 休 | 休日 | |
| 2024年07月16日 | I 11 | 重積分の計算・変数変換 §5.2 中間試験(10時50分-12時20分) | |
| 2024年07月18日 | 試 | | |
| 2024年07月22日 | | | |
| 2024年07月23日 | I 12 | 広義積分 §§3.3, 5.5 | 2024年07月25日17時00分 |
| 2024年07月25日 | 13 | | |
| 2024年07月29日 | | | |
| 2024年07月30日 | 休 | 休講(試験・補講期間) | |
| 2024年08月01日 | 試 | 期末試験(10時50分-12時20分) | |

- 以上は、2024年06月07日現在のものです。変更の可能性もありますので御了承下さい。
- この色は微積分学演習第一の日付を表しています/ この色は試験の日程を表しています。
- 「提出物締切」は講義(山田担当)に関わる提出物の締切です。演習に関わる提出物は担当者(齋藤先生)の指示に従ってください。
- 7月18日(水)に中間試験を行います。事前に申し出がない限り欠席は認めません。
- 8月1日(木)に期末試験を行います。事前に申し出がない限り欠席は認めません。

成績評価

- ▶ 期末試験（8月1日）の得点（80点満点）と演習の得点（20点満点）の和を評価の基本点とする。
- ▶ 合格者平均点を80点とするために、提出課題および中間試験の評価を用いて調整を行うことがある。課題の得点と中間試験の得点は同一ウェイトとする。
- ▶ 成績評価は、提出課題・中間試験答案・期末試験答案に記述されたもののみを材料とする。

課題

- ▶ 課題内容：講義内容，講義資料の誤りの指摘または質問.
- ▶ 原則として木曜日の講義当日の **17:00 JST** までに T2SCHOLA に提出.
- ▶ 評価：各回 3 点満点. 意味が通じることが正しい文字で書かれていれば原則 3 点.

課題提出方法

- ▶ 提出用紙は T2SCHOLA に pdf・Lua \LaTeX ソースをおく.
- ▶ 答えは提出用紙に記入し、PDF 形式にして T2SCHOLA に提出.
- ▶ PDF 作成の方法：(1) 提出用紙を印刷して記入しスキャンする. iOS/Andoroid の CamScanner などのアプリケーションが使えるはず. (2) 提出用紙 pdf に直接書き込み, pdf として書き出す. iOS の GoodNotes (有料) などが使える. (3) 提出用紙の Lua \LaTeX コードをハックして pdf を作る.
- ▶ 電子ファイルでの提出は、見た目のフォーマットが同一であれば可.
- ▶ 採点の都合上、提出用紙のフォーマットの変更は不可. とくに、ファイルは1 ページちょうど、サイズはA5. PDF 文書の「プロパティ」でサイズが 105×210mm くらいになっていれば問題ない.
- ▶ 質問等には個人が特定できない形で回答する.

PDF tips

- ▶ PDF 文書が所定のサイズでない場合があります。たとえば、辺の長さが2m くらい。写真をPDF 化するとき起きることがあるようです。この場合は、適当に用紙サイズを設定して「PDF ファイルに印刷」すると修正できることがあります。
- ▶ オリジナルの提出用紙に書き込みをしてPDF 化した場合、当方でファイルを結合・分割すると書き込みが消えてしまうことがあるようです。PDF 化したファイルをもう一度PDF リーダで読み込み、「PDF ファイルに印刷」すると修正できることがあります。

FAQ

Q: なぜ質問を評価するのか.

A: 講義を聞いて頭を働かせて欲しいから.

Q: なぜ誤りの指摘を評価するのか.

A: 講義を聴いた, 講義資料を読んだということだから.

Q: 提出締切を遅くしてほしい.

A: 山田の処理が間に合わない.

Q: 中間試験は講義期間の「真ん中」ではないのか.

A: 中間値の定理で見つかる点は区間の中央ではない.