微分積分学第一 (LAS.M101-06)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/11

微分積分学第一

(LAS.M101-6; L クラス・U74–80)

火曜日 1/2 時限・木曜日 3/4 時限
（講義：担当 山田光太郎）

月曜日 1/2 時限（演習：担当 斎藤耕太）

T2SCHOLA

- 講義資料
- 課題
- 課題提出
- フィードバック

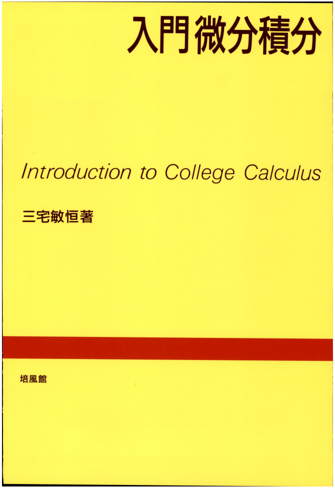
講義資料は講義前日までに T2SCHOLA にあげるので各自ダウンロードして参照できるようにしてください.

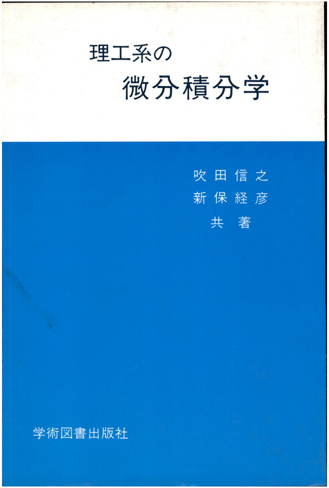
講義概要

講義の概要
理工系の「掛け算九九」として，微分積分学の基本的事項を学ぶ.

到達目標
多変数関数の微積分の基本的事項を理解し，それらの操作ができる.

教科書


入門微分積分
Introduction to College Calculus
三宅敏恒著
培風館


理工系の
微分積分学
吹 田 信 之
新 保 経 彦
共　著
学術図書出版社

講義ノート

1. 初等関数の微積分

1.1　1 変数関数（復習）

高等学校で学んだ微分・積分は，関数に対する操作であった．

一般に（ある範囲の）数 x に対して，1 つの数 $f(x)$ を対応させる規則 f を（1 変数）**関数** [1]という．このとき，考える x の範囲を関数 f の**定義域**，値 $f(x)$ として想定している数の範囲を f の**値域** という．また，x が関数 f の定義域全体を動くとき，値 $f(x)$ が動く値域の中の範囲を f の**像** とよぶ [2]．

■ 実数の集合と区間　関数の定義域，値域，像を表現するために集合の言葉を復習しよう：数学的な対象の集まりを**集合**という [3]．とくに，**実数** 全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く [4]．

一般に対象 x が集合 X の**要素**であるということを “$x \in X$” と表す．たとえば “$x \in \mathbb{R}$” とは “x は実数全体の集合の要素” すなわち “x は実数” であることを表している．

集合 X のいくつかの要素を集めて得られる集合を X の**部分集合**という [5]．集合 Y が X の部分集合であることを，記号 $Y \subset X$ と表す [6]．すなわち [7]

$$Y \subset X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{“}y \in Y \text{ ならば } y \in X\text{”}$$

である．

---

*) 2024 年 06 月 11 日/13 日

1) 関数（かんすう）：a function; 語源からすれば「函数」と書くのが正しいのかも知れない．

2) 定義域:the domain; 値域: the range; 像: the image.

3) 集合：a set; この説明では集合と集合でないものの区別がつけられないので何も言っていないことになるが，この授業で扱う範囲では，対象が明確に述べられるのでとくに曖昧になることはないはずである．

4) 実数: real numbers; 実数全体の集合: the set of real numbers; $\mathbb{R}$ は 太字の “R”．印刷では “$\boldsymbol{R}$” を用いることもある．実数とは**数直線上にめもることができる数**のことと思っておこう．実数の概念を数学的に満足な形で書き表すのはやさしくないが，後期「微分積分学第二」でその概要を紹介する．

5) 要素: an element; 部分集合: a subset; $X \subset Y$ と $x \in Y$ の区別に注意せよ．

6) 「Y が X の部分集合である」ということを，高等学校の教科書では $Y \subseteqq X$ と書くことが多いが，それ以外の世界では $Y \subset X$ と書くのが多数派のようなので，ここでは後者（高等学校の教科書流でない方）を採用する．この用法では $X \subset X$ は正しい．

7) 記号 “$A \Leftrightarrow B$” は “A であるための必要十分条件は B”，“A と B は同値”，“A if and only if B”，“A is equivalent to B” と読む．

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合，すなわち実数の集合で，数直線上のひと続きの部分を表しているものを**区間**という．区間には次のようなものがある：

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}, & (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqq b\},\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqq x \leqq b\}, & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqq x < b\},\\
(-\infty,a) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}, & (-\infty,a] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqq a\},\\
(a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}, & [a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geqq a\},\\
(-\infty,+\infty) &= \mathbb{R}, & [a,a] &= \{a\}.
\end{aligned}$$

ただし a, b は $a < b$ をみたす実数である．とくに (a,b) を**開区間**，$[a,b]$ を**閉区間**という [8]．

■ 1 **変数関数の例**

例 1.1. 実数 x に対して実数 x^2 を対応させる対応の規則にいま f という名前をつけると，“f は定義域を $\mathbb{R}$，値域を $\mathbb{R}$ とする関数である” と考えることができる．引用符で囲んだ部分のことを

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

と書く．また，“f は x を x^2 に対応させる” ということを

$$f\colon x \longmapsto x^2, \qquad f(x) = x^2$$

と書く．矢印 “$\to$” と “$\mapsto$” はこのように使い分ける．

この関数 f によって $\star$ に対応する値（数）が $f(\star)$ である：

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 4, \quad f(a) = a^2, \quad f(s) = s^2, \quad f(x^2-1) = (x^2-1)^2.$$

ここで x が実数全体を動くと，その値 $f(x)$ は負でない実数全体 [9]を動く．したがって f の像は $[0,+\infty)$ となる [10]．　◇

---

8) 区間: an interval; 開区間 an open interval; 閉区間: a closed interval. 開区間の括弧は他の記号と紛らわしいかもしれない．それを避けるために (a,b) のことを $]a,b[$ などと書く場合もある．無限大 $\pm\infty$ は実数ではないので，たとえば $(0,+\infty]$ という表記はない．

9) 負でない実数: a nonnegative real number; 負でない実数全体 (the set of nonnegative real numbers) は $[0,+\infty)$ のことを表している．正の実数全体 (the set of positive real numbers) は $(0,+\infty)$ のこと．同様に正でない（負の）実数全体 (the set of nonpositive (negative) real numbers) はそれぞれ $(-\infty,0]$, $(-\infty,0)$ を表す．

10) ここでの “像” のことを “値域” という場合もあるがこの講義では例 1.1 のように “像” と “値域” を使い分ける．

授業日程

2024 年度 (第 2 四半学期) 微分積分学第一・演習 (LAS.M101-06) 授業日程

2024 年 06 月 07 日 山田光太郎

			授業内容	提出物締切
2024 年 06 月 10 日				
2024 年 06 月 11 日	I	1	初等関数と微積分　§§1.2, 1.3, 2.1	
2024 年 06 月 13 日		2		2024 年 06 月 13 日 17 時 00 分
2024 年 06 月 17 日				
2024 年 06 月 18 日	I	3	多変数関数・偏微分　§4.1	
2024 年 06 月 20 日		4		2024 年 06 月 20 日 17 時 00 分
2024 年 06 月 24 日				
2024 年 06 月 25 日	I	5	連続性と微分可能性　§§1.2, 4.2	
2024 年 06 月 27 日		6		2024 年 06 月 27 日 17 時 00 分
2024 年 07 月 01 日				
2024 年 07 月 02 日	I	7	チェイン・ルール　§4.2	
2024 年 07 月 04 日		8		2024 年 07 月 04 日 17 時 00 分
2024 年 07 月 08 日				
2024 年 07 月 09 日	I	9	重積分の考え方　§5.1	
2024 年 07 月 11 日		10		2024 年 07 月 11 日 17 時 00 分
2024 年 07 月 15 日	休		休日	
2024 年 07 月 16 日	I	11	重積分の計算・変数変換　§5.2	
2024 年 07 月 18 日	試		**中間試験**（10 時 50 分–12 時 20 分）	
2024 年 07 月 22 日				
2024 年 07 月 23 日	I	12	広義積分　§§3.3, 5.5	
2024 年 07 月 25 日		13		2024 年 07 月 25 日 17 時 00 分
2024 年 07 月 29 日				
2024 年 07 月 30 日	休		休講（試験・補講期間）	
2024 年 08 月 01 日	試		**期末試験**（10 時 50 分–12 時 20 分）	

- 以上は, 2024 年 06 月 07 日現在のものです．変更の可能性もありますので御了承下さい.
- この色は微分積分学演習第一の日付を表しています/ **この色**は試験の日程を表しています.
- 「提出物締切」は講義（山田担当）に関わる提出物の締切です．演習に関わる提出物は担当者（斎藤先生）の指示に従ってください.
- **7 月 18 日（木）に中間試験を行います．**事前に申し出がない限り欠席は認めません.
- **8 月 1 日（木）に期末試験を行います．**事前に申し出がない限り欠席は認めません.

成績評価

- 期末試験（8 月 1 日）の得点（80 点満点）と演習の得点（20 点満点）の和を評価の基本点とする．

- 合格者平均点を 80 点とするために，提出課題および中間試験の評価を用いて調整を行うことがある．課題の得点と中間試験の得点は同一ウェイトとする．

- 成績評価は，提出課題・中間試験答案・期末試験答案に記述されたもののみを材料とする．

課題

- 課題内容：講義内容，講義資料の誤りの指摘または質問.
- 原則として木曜日の講義当日の **17:00** JST までに T2SCHOLA に提出.
- 評価：各回 3 点満点．意味が通じることが正しい文字で書かれていれば原則 3 点.

課題提出方法

- 提出用紙は T2SCHOLA に pdf・LuaLaTeX ソースをおく．
- 答案は提出用紙に記入し，PDF 形式にして T2SCHOLA に提出．
- PDF 作成の方法：(1) 提出用紙を印刷して記入しスキャンする．iOS/Andoroid の CamScanner などのアプリケーションが使えるはず．(2) 提出用紙 pdf に直接書き込み，pdf として書き出す．iOS の GoodNotes（有料）などが使える．(3) 提出用紙の LuaLaTeX コードをハックして pdf を作る．
- 電子ファイルでの提出は，見た目のフォーマットが同一であれば可．
- 採点の都合上，提出用紙のフォーマットの変更は不可．とくに，ファイルは1ページちょうど，サイズはA5．PDF 文書の「プロパティ」でサイズが 105×210mm くらいになっていれば問題ない．
- 質問等には個人が特定できない形で回答する．

PDF tips

- PDF 文書が所定のサイズでない場合があります．たとえば，辺の長さが 2m くらい．写真を PDF 化するときに起きることがあるようです．この場合は，適当に用紙サイズを設定して「PDF ファイルに印刷」すると修正できることがあります．

- オリジナルの提出用紙に書き込みをして PDF 化した場合，当方でファイルを結合・分割すると書き込みが消えてしまうことがあるようです．PDF 化したファイルをもう一度 PDF リーダで読み込み，「PDF ファイルに印刷」すると修正できることがあります．

FAQ

Q: なぜ質問を評価するのか.

A: 講義を聞いて頭を働かせて欲しいから.

Q: なぜ誤りの指摘を評価するのか.

A: 講義を聴いた，講義資料を読んだということだから.

Q: 提出締切を遅くしてほしい.

A: 山田の処理が間に合わない.

Q: 中間試験は講義期間の「真ん中」ではないのか.

A: 中間値の定理で見つかる点は区間の中央ではない.