微分積分学第一 (LAS.M101-06)

初等関数

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/11

記号

(R ℝ ちがう文字)

blackboard bold

- $\mathbb{R}$：実数（real numbers）全体の集合

数直線

- $\mathbb{C}$：複素数（complex numbers）全体の集合
- $\mathbb{N}$：自然数（natural numbers）全体の集合

正の整数 1, 2, 3…

0は自然数か？

文脈でちがう

負でない整数 0, 1, 2…

- $\mathbb{Z}$：整数（integers; whole numbers）全体の集合

der Zahl

$x \in \mathbb{R}$

xは$\mathbb{R}$の要素である

xは実数

1変数$\boxed{\text{関数}}$ ← 微分 積分

$I \subset \mathbb{R}$ （$\mathbb{R}$の部分集合）とくに（区間）
（全体でもよい）

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$; Iの各要素 x に対して
$\mathbb{R}$の要素 $f(x)$ をひとつ
対応させる規則

I 上の実数値関数

・$I = \mathbb{R}$　　$f(x) =$ x を(無限)小数展開したときの小数第1位の数

$$1 = \underline{0.999\cdots}$$

$$f(1) = 9$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \qquad f(\pi) = 1 \qquad f(e) = 7$$

・
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

グラフ

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

f: function

函数

函数　関数

$\{(x, f(x)) \,;\, x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$

$=$ f の graph.

高等学校で習った(式で表せる)関数

$f(x) = x^2 + 2x - 3$　　$f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$　…

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$　…

三角関数

trigonometric functions

circular functions

sec, cosec, cot

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

円のパラメータ表示.

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

正割 余弦

$\cos^{-1} x$ とはかかない!

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

csc

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

ctg

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

$$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$$

$$\boxed{\sec^2 t - \tan^2 t = 1}$$

$\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{cases} x = \sec t \\ y = \tan t \end{cases}$$

双曲線のパラメータ表示.

指数関数・対数関数

exp, log

・ $e^x = \exp x$　　・ $e^{\sin x} = \exp \sin x$

・ $f(x) = \log x$ は $g(x) = e^x$ の逆関数

$\log_a x$　　$\log x = \log_e x$ 自然対数

(別の文脈では $\underline{\log x = \log_{10} x}$)
常用対数

$\ln x$
自然対数.

双曲線関数

$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$

定義 (定義 1.9)

hyperbolic cosine

[illegible] [illegible]

$$\cosh x = \boxed{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

双曲線関数

命題 (命題 1.10)

- 恒等式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つ
- 加法定理：
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$
- 微分公式：
$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x.$$
- 積分公式：
$$\int \cosh x\,dx = \sinh x, \quad \int \sinh x\,dx = \cosh x, \quad \int \tanh x\,dx = \log\cosh x.$$

双曲線関数

命題 (命題 1.10)

- 恒等式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つ
- 加法定理：
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$
- 微分公式：
$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x.$$
- 積分公式：
$$\int \cosh x\, dx = \sinh x, \quad \int \sinh x\, dx = \cosh x, \quad \int \tanh x\, dx = \log\cosh x.$$