微分積分学第一 (LAS.M101-06)

初等関数

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/11

双曲線関数

定義 (定義 1.9)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

双曲線関数

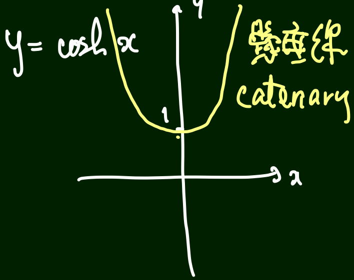
命題 (命題 1.10)

- 恒等式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つ
- 加法定理：
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$
- 微分公式：
$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x.$$
- 積分公式：
$$\int \cosh x\,dx = \sinh x, \quad \int \sinh x\,dx = \cosh x, \quad \int \tanh x\,dx = \log\cosh x.$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}, \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\frac{d}{dt} \underline{\operatorname{sech} t} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\cosh t} = \frac{-\sinh t}{\cosh^2 t} = \underline{-\tanh t \ \operatorname{sech} t}$$

$$\frac{d}{dt} \underline{\tanh t} = \underline{\operatorname{sech}^2 t}$$



$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sech} t & > 0 \\ y(t) = \tanh t \end{cases}$$

$$x' = -xy$$

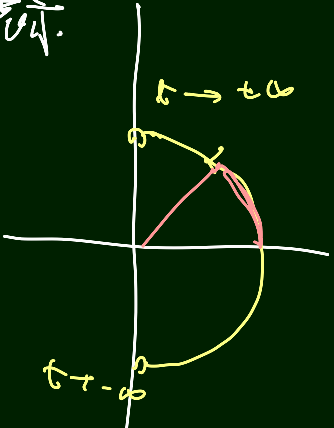
$$y' = x^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

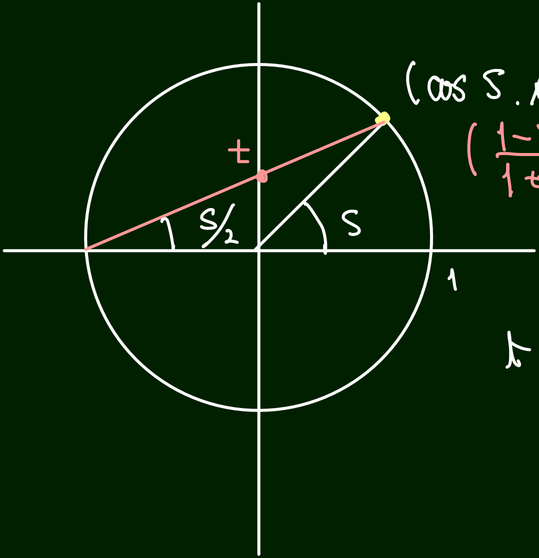
$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

$$1 - \underline{\underline{\tanh^2 t}} = \underline{\underline{\operatorname{sech}^2 t}}$$

円のパラメータ表示.



Mercator's world map



$(\cos s, \sin s)$

$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$

$t = \tan\frac{s}{2}$

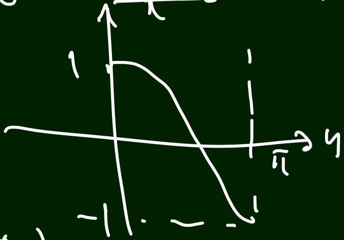
逆三角関数

$\cos^{-1}$ arccos

$\mathrm{Cos}^{-1}\,x,\ \mathrm{Sin}^{-1}\,x,\ \mathrm{Tan}^{-1}\,x$

定義

$y = \mathrm{Cos}^{-1} x \iff x = \cos y \quad (0 \leqq y \leqq \pi)$



$y = \mathrm{Sin}^{-1} x \iff x = \sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \mathrm{Tan}^{-1} x \iff x = \tan y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$

$$y = \tan^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} a$$

$$x = \tan y$$

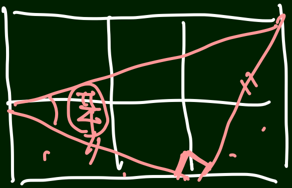
$$\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$1 = (1+\tan^2 y)\frac{dy}{dx}$$

$$(\tan s)' = 1 + \tan^2 s$$

$$= \sec^2 s$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$



Macin's formula

$$4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

初等関数

elementary functions.

多項式，冪関数 (x^α の形．冪乗根を含む)，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数に加減乗除，合成の操作を有限回施すことによって得られる関数を初等関数という．

課題

- 講義資料や講義の誤りの指摘
- 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙で T2SCHOLA に

締切：6 月 13 日 17:00 JST