

微分積分学第一 (LAS.M101-06)

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

`http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/`

東京工業大学

2024/06/13

EXPLANATION

東工大生を対象に、数学(数学系科目)に関わる質問、疑問に
教員や職員と数学系大学院生が対応します。
ご都合にあわせてご利用し、是非学修に役立ててください！

4月 April							5月 May						
月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日
					6	7			1	2	3	4	5
8	9	10	11	12	13	14	6	7	8	9	10	11	12
15	16	17	18	19	20	21	13	14	15	16	17	18	19
22	23	24	25	26	27	28	20	21	22	23	24	25	26
29	30						27	28	29	30	31		

6月 June							7月/8月 July/August						
月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日
					1	2	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	8	9	10	11	12	13	14
10	11	12	13	14	15	16	15	16	17	18	19	20	21
17	18	19	20	21	22	23	22	23	24	25	26	27	28
24	25	26	27	28	29	30	29	30	31	8/1	8/2	8/3	8/4
							8/5	8/6					

※期末試験期間中も開室しませす！
(但し科目の予備日を除く)

※期末試験期間中も開室しませす！
(最終日と過1科目の予備日を除く)

開室日

◇2024年度 前期 対面相談室 実施概要◇

開室曜日 (月)・(火)・(水)・(木)・(金) ※上記カレンダーをご参照下さい
開室時間 16時00分～18時00分
場 所 Takl Plaza 地下1階 相談ブース

予約不要です、お気軽にお越しください！
※入室時は精査することがあります。

2024年 3月
数学事務室

逆三角関数

定義

$$y = \text{Cos}^{-1} x \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad x = \cos y,$$

$$y = \text{Sin}^{-1} x \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad x = \sin y,$$

$$y = \text{Tan}^{-1} x \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad x = \tan y,$$

$$\cos^{-1} 1 = 0$$

$$\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq y \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

y
||
"

$$\text{Cos}^{-1} x + \text{Sin}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \cos y \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - y = \text{Sin}^{-1} x$$

$$\text{Tan}^{-1}(\sqrt{2} - 1) = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Tan}^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

逆三角関数

$$\text{Tan}^{-1} \frac{1}{2} + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} \quad \checkmark$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3 + 2}{6 - 1} = 1$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + n\pi \quad (n: \text{整数})$$

$$4 \text{Tan}^{-1} \frac{1}{5} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \alpha + \beta < \pi$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1} \frac{1}{5} < \tan^{-1} (\sqrt{2}-1) < \frac{\pi}{8}$$

$$0 < 4\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$$

Macin $\frac{\pi}{4}$
12式

$$\tan(4\alpha - \beta) = 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{10}{25-1} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \frac{5^2}{12^2}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 12}{12^2 - 5^2} = \frac{120}{119}$$

$$\tan(4\alpha - \beta) = \frac{\tan 4\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 4\alpha \tan \beta} = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}}$$

$$= \frac{120 \times 239 - 119}{119 \times 239 + 120} = 1$$

逆三角関数

事実 (合成公式)
定数 a, b に対して

$$-\text{図} a \rightarrow 5 \quad \begin{cases} \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

$$d = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

よって $\alpha = \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

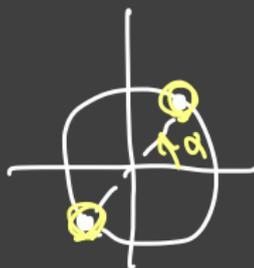
$$\begin{aligned} a \cos x + b \sin x &= \sqrt{a^2+b^2} \sin(x+\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \cos(x+\beta) \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

ただし $\alpha =$

$\beta =$

$$\sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x \right)$$



“atan2”

atan2(x, y)
点(x, y)の角度

双曲線関数

定義 (定義 1.9)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

双曲線関数

命題 (加法定理)

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$

$$\left(|a| \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ < \end{matrix} |b| \right)$$

双曲線関数の合成公式？

$$a \cosh x + b \sinh x$$

場合分け、

初等関数

多項式, 冪関数 (x^α の形. 冪乗根を含む), 指数関数, 対数関数, 三角関数, 逆三角関数に加減乗除, 合成の操作を有限回施すことによって得られる関数を初等関数という.

・ 双曲線関数は初等関数

逆双曲線関数

$$\checkmark \quad \text{Cosh}^{-1} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

$$\checkmark \quad \text{Sinh}^{-1} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$\checkmark \quad \text{Tanh}^{-1} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

$$x = \text{Cosh}^{-1} y$$

$$y = \cosh x \quad (x \geq 0)$$

$$2y = e^x + e^{-x}$$

$$e^{2x} - 2y e^x + 1 = 0$$