微分積分学第一 (LAS.M101-06)

初等関数

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/13

- $$\frac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ $\quad$ $x = \cos y$

$1 = \frac{d}{dx}x = -\sin y\,\frac{dy}{dx}$ $\quad$ =はつけな

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$ $\quad$ $0 < y < \pi$

$= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$ $\quad$ $\sin y > 0$

$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $$\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\mathrm{Cos}^{-1}x + \mathrm{Sin}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

- $$\frac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

$y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ $\quad$ $x = \tan y$

$1 = (1+\tan^2 y)\frac{dy}{dx}$

$= (1+x^2)\frac{dy}{dx}$

$$(\tan t)' = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t = 1 + \tan^2 t$$

$y = \tan t$

$y' = 1 + y^2$

$y'' = 2yy' = 2y(1+y^2)$

$y''' = 2(1+3y^2)(1+y^2)$

$\vdots$

導関数を求めよ

- $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = y$ $\quad -1 < x < 1$

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$$

$$\log y = \frac{1}{2}\{\log(1-x) - \log(1+x)\}$$

$$\frac{y'}{y} = \cdots$$

- $f_2(x) = e^{\sin x} = \exp\sin x$

y

$$\log y = \sin x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x$$

$$y' = \cos x \cdot (\exp \sin x)$$

x^x

Q

正しいか？

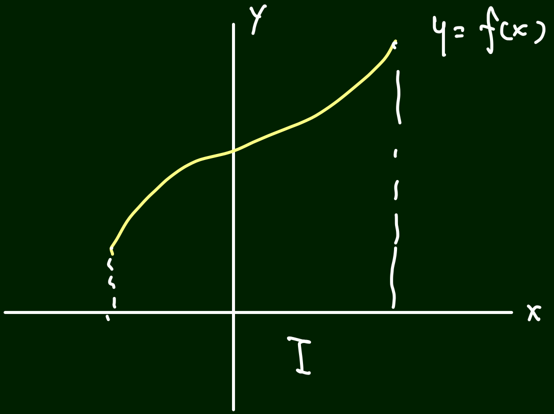
- 微分が正なら増加.

どういう いみ?

“微分が正なら増加”

定理

区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された微分可能な関数 f が，区間 I 上のすべての点で正の値を取るならば，f は I で単調増加．



平均値の定理

変な例

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$x=0$で連続でない

$$f'(x) = \begin{cases} \underbrace{\dfrac{1}{2} - \cos\dfrac{1}{x}}_{>0} + 2x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ (h \neq 0)}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{2} + h \sin\frac{1}{h} \right) = \frac{1}{2}$$

原点のいくらでも近くに $f' < 0$ となる区間がある

C^1-級の関数

定義

区間 $I\ (\subset \mathbb{R})$ で定義された関数 f が $\boxed{C^1\text{-級}}$

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f が I 上の各点で微分可能で，導関数 f' が I で連続.

C^1-級　$f'(a) > 0$

$\Rightarrow$ a の近くの区間をとれば

$f'(x) > 0$

$f'(a) > 0$ なら f は a で "増加の状態"