微分積分学第一 (LAS.M101-06)

初等関数

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/13

微積分の基本定理

定理 (微積分の基本定理)

区間 I 上で定義された連続関数 f と $a \in I$ に対して

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

とおくと F は微分可能で

$$F'(x) = f(x).$$

非自明

微積分の基本定理

F' = f となる F

系

区間 I 上で定義された連続関数 f の原始関数を F とするとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(定義？)

高校流

先に知られてる。

区分求積

・通常、積分は"定積分"を先に定義する。

・なぜ高校流にしないか？ 与えられた関数に原始関数が存在するかわからない。

・定理　theorem　事実 (重要)　証明.

命題　proposition.

補題　lemma　何かを示すときの補助的な定理

系、　corollary　前の定理からかんたんに導ける

定義　definition　ことばの約束

逆三角関数

- $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \mathrm{Sin}^{-1}\, x$

- $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{Tan}^{-1}\, x$

- $\displaystyle\int_0^x \mathrm{Tan}^{-1} t\,dt = \int_0^x t' \,\mathrm{Tan}^{-1} t \, dt$

$$= \Big[t \,\mathrm{Tan}^{-1} t \Big]_0^x - \int_0^x t \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= x \,\mathrm{Tan}^{-1} x - 0\,\mathrm{Tan}^{-1} 0 - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t\,dt}{1+t^2}$$

$$= x \,\mathrm{Tan}^{-1} x - \frac{1}{2}\Big[\log(1+t^2) \Big]_0^x$$

$$= x \,\mathrm{Tan}^{-1} x - \frac{1}{2}\Big\{ \log\underline{\underline{(1+x^2)}} - \cancel{\log(1)} \Big\}$$

有理関数

部分分数分解

$$\int_0^x \frac{d\cancel{x}^{\,t}}{1-\cancel{x}^4_{\,t}}$$

$(-1<t<1)$

$$\frac{1}{1-t^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t^2}+\frac{1}{1+t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t^2}$$

$$\Big\downarrow \int$$

$$\left[\frac{1}{4}\log\frac{1+t}{1-t}+\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}t\right]_0^x$$

有理関数

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$$

$$1+t^4 = t^4+2t^2+1-2t^2 = (t^2+1)^2-(\sqrt{2}t)^2$$

$$= (t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)$$

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{at+b}{(t^2-\sqrt{2}t+1)} + \frac{ct+d}{(t^2+\sqrt{2}t+1)}$$

$$1 = (at+b)(t^2+\sqrt{2}t+1) + (ct+d)(t^2-\sqrt{2}t+1)$$

$\rightsquigarrow$ $a. b. c. d.$ $\quad b=d=\frac{1}{2}$ $\quad a=-c \underset{?}{=} \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\frac{at+b}{t^2+\sqrt{2}t+1} = \frac{\frac{a}{2}(2t+\sqrt{2})+b'}{t^2+\sqrt{2}t+1}$$

$\int$

$\ln$

$$\frac{b'}{t^2+\sqrt{2}t+1} = \frac{s}{(\underbrace{qt+r}_{u})^2+1}$$ 平行定成

$$\frac{1}{u^2+1}$$

三角関数

- $R(x, y)$: x と y の有理式

事実

積分 $\displaystyle\int R(\cos t, \sin t)\, dt$ は

$$\left(\tan\frac{t}{2} = u\right)$$

なる置換により有理関数の積分に帰着される．

$$\int \frac{dt}{\sin t}$$

$$u = \tan\frac{t}{2}$$

$$\sin t = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dt = \cdots$$

課題

- 講義資料や講義の誤りの指摘
- 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙で T2SCHOLA に

締切：6 月 13 日 (本日) 17:00 JST