微分積分学第一 (LAS.M101-06)

多変数関数と偏微分

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/18

Q and A

Q; 実数を数直線上の点と対応させることで定義していますが，そもそも「数直線」(長さ) を先に考えている時点で循環論法になっているのではないでしょうか．(数直線，長さというものは，そもそも実数を使ったものなので，実数を定義する道具として数直線，長さを使うのは違和感があります...)

(ここでは)実数は定義しない　(後期)

$f(x) = x^2 - 2 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$

有理数しか知らない人：
中間値の定理は成立しない

Q and A

Q: 逆三角関数を書くときに, $\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ のように最初の文字と大文字にする意味は 何なのか？

$\cos^{-1} x$ とかくんもいる

主値

$\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \frac{\pi}{4} \quad -\frac{\pi}{4} \quad \frac{7}{4}\pi \quad \frac{9}{4}\pi \cdots$

(左のような値全部を表すと思う
流儀もある)

多価関数

主値

Q: $\sec x$ の原始関数を導くときに，$t = \tan\frac{x}{2}$ と置換して，t の有理式にして積分するが，この考え方はどのようにして思いつくのかが疑問です．

とうまくいく

A: 定石，昔思いついた人がいた

$$\int_0^x \sec t\, dt = \int_0^x \frac{1}{\cos t}\, dt \quad *$$

$$= 2\int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{\cancel{(1+u^2)}}{(1-u^2)\cancel{(1+u^2)}}\, du$$

$$= \cdots$$

$$u = \tan\frac{t}{2}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+u^2)$$

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$* = \int_0^x \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\, dt$$

Q and A

Q; 双曲線関数は三角関数と類似の性質を持つために，cosh となどと三角関数に似た形にわざわざ置くのかという疑問.

Q: $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ と双曲線関数が，三角関数と似た性質を示すのはオイラーの公式が成り立つからですか？

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{x+iy} := e^x(\cos y + i\sin y) \quad x, y \in \mathbb{R}$

$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$

$\cos y = \cosh iy$

$\cosh x = \cos ix \ldots$

Q and A

Q: 逆関数の Tan^{-1} で成り立つ公式であるマチンの公式はどのように考えて 239 という数字は出てくるのでしょうか.

$$\tan\left(4\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5}\right) = \frac{120}{119} \quad (\fallingdotseq 1)$$

$$\tan\left(4\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{120 - 119}{120 + 119} = \frac{1}{239}$$

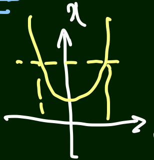
Q and A

arccosh. argcosh arcosh

Q: $\operatorname{Cosh}^{-1} x, \operatorname{Sinh}^{-1} x$ を求めることについて (代表として $\operatorname{Cosh}^{-1} x$ をとりあげます．) $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(x \geqq 0, y \geqq 1)$ より，$e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$ となりますが，ここから条件を満たすものが $e^x = y + \sqrt{y^2-1}$ のみであることをどのように示せばよいのかがわかりません．

$$y = \operatorname{Cosh}^{-1} x \iff \underline{\underline{x = \cosh y}} \quad (y \geqq 0)$$

x = cosh y



$$1 \leqq e^y = x \pm \sqrt{x^2-1} > 0$$

$$\underbrace{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}_{\substack{\text{VI} \\ 1}} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = 1$$

一方が1より大なら
他方は1より小。

Q and A

Q: 関数を微分したら正になると単調増加というような曖昧な定義（原文ママ）は不適当とおっしゃっていたが問題を解く際にこの定義は十分に厳密さを保っていると判断するにはどうしたらよいのか？ (コツが知りたい) 自分の頭の中には典型例しか浮かばないので自分のおいた定義が仮に間違っていたとしてもその定義が自明と信じて問題を解き進めてしまう.

A: 定義ではない．あなたの典型例は本当に典型ですか？

Q and A

Q: 一般に関数の定義域の端点では微分不可能なのでしょうか．
その場合，端点の特別な微分可能性が存在するのでしょうか．

A: はい，時間があったらどこかで説明するかもしれません

閉区間 $[a,b]$ で定義された関数が微分可能

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $[a,b]$ を含む開区間で定義された

微分可能な関数に拡張できる．

$f(x)=\sqrt{x}$ (on $[0,1]$) : 0で微分可能ではない

Q and A

Q: テキストの例 1.1 で x を x^2 に対応させる関数 f の値域が $\mathbb{R}$ となっているが，全ての実数 x に対して $x^2 \geqq 0$ であるから f の値域は，$\underbrace{\text{0 以上の実数}}_{\text{像}}$となる．

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

値域は最初に設定するもの