

微分積分学第一 (LAS.M101-06)

多変数関数と偏微分

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

<http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/>

東京工業大学

2024/06/18

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

n 次元数空間

n 次元ユークリッド空間 ... $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^1 = \{(x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \text{ (同一視)}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{座標平面}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \quad \text{"空間}$$

多変数関数

部分集合である

$$D \subset \mathbb{R}^n$$

定義域

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

値

$A \subset B$: $A = B$ の場合を除く

(このとき $A \subseteq B$ と $A \subset B$ の区別)
人間的に 少敬語

$A = B$ と除外する場合

$$A \subsetneq B$$

A は B の真部分集合

(x_1, \dots, x_n)

$\in D$ の各要素に実数を
対応させるための規則

D 上の関数

変数が n 個あるので

n 変数関数

例

点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$f: \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

2変数関数

(要素)

要素2つ

(注) “ $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ” . 2変数関数ではない
“ $x^2 + y^2 - 1$ ” . 2変数関数

例

- ▶ 東経 x 度, 北緯 y 度の地点の標高を $h(x, y)$ メートルとすると, $h(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である.

- ▶ 時刻 t の いまこの瞬間の, 東経 x 度, 北緯 y 度の地点の地表における気圧を $p(x, y)$ ヘクトパスカルとすれば, $p(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である. 地表から z_m の点.

$$p(t, x, y) \quad \text{3変数関数}$$

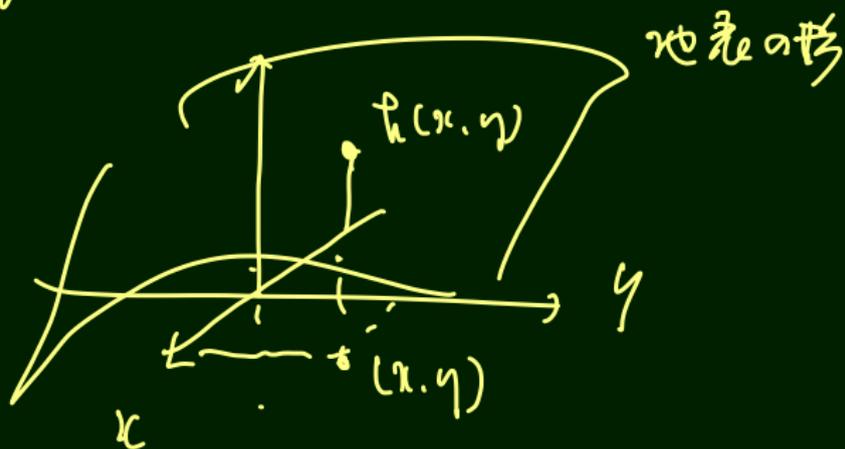
$$p(t, x, y, z) \quad \text{4 "}$$

グラフ

$$D \subset \mathbb{R}^2; f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \text{ のグラフ} := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$$

標高 $h(x, y)$



等高線

$$D \subset \mathbb{R}^2; f: D \rightarrow \mathbb{R}; c \in \mathbb{R}$$

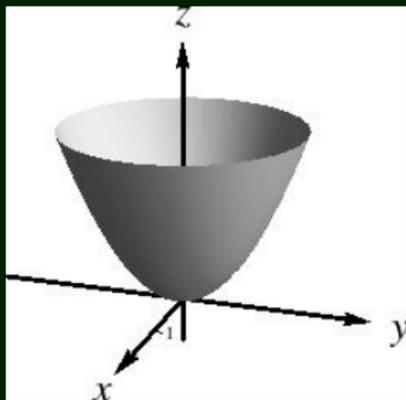
$$f \text{ の高さ } c \text{ の等高線} := \{(x, y) \mid f(x, y) = c\} \subset D \subset \mathbb{R}^2$$
$$\{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$$

気圧 $p(x, y)$

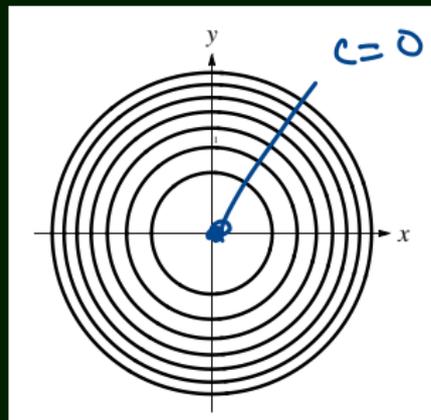
等圧線 = 等高線

例

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



$$z = x^2 + y^2$$



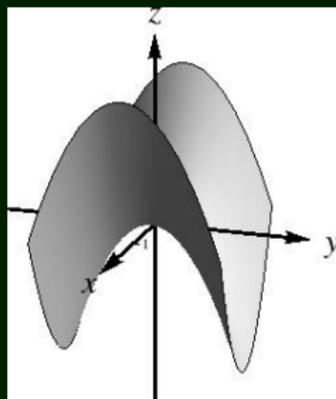
$$x^2 + y^2 = c$$

c 有 $a \in \mathbb{R}$

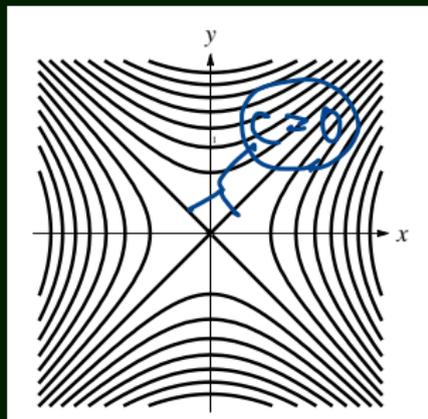
$$\text{等値線} = \phi$$

例

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$



$$z = x^2 - y^2$$



$$x^2 - y^2 = c$$

一般の n 変数関数の場合

一般に n 変数関数 $f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ と定数 c に対して

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\} \subset D \subset \mathbb{R}^n.$$

をそれぞれ f のグラフ, 値 c の等高面または等値集合という。

多変数関数の微分
偏微分

課題

- ▶ 講義資料や講義の誤りの指摘
- ▶ 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙で T2SCHOLA に
締切：6月20日 17:00 JST