

2024年6月18日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 (LAS.M101-06) 講義資料 2

■お知らせ

- 今回は91名の方から課題の提出がありました。T2SCOLAからフィードバックを行っています。なお、用紙に記入されているコメントは山田用のメモです。読めない字があるかもしれませんが、この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください。
- 提出物が2ページであった方が1名。2ページ目は見ていません。

■前回の補足

- 自然数に0を含むか含まないかについて、研究分野によるものなのか、どちらが先なのか、などのご質問がありました。とくに研究分野による違いは感じません。「自然数」という概念は0の発見より前にもあるはずですね。
- 逆三角関数の記法について、 \arccos でなく \cos^{-1} を使うのは逆数と紛らわしい、とのご指摘を複数いただきました。ごもっともで、これは因習ですが、昔から頻繁に使われている記号なので、あなたが使うかどうかはともかく、読めなければいけません。同様に \sec , \csc , \cot も不要といえば不要かもしれませんが、読めないというのはいけません。
- 逆三角関数はどんなときに使うのか? というご質問を複数いただきましたが6月13日の講義で使いました。
- 双曲線関数は三角関数と全く違う定義なのに、三角関数に似た性質を持っているのはなぜか、というご質問も複数。定義域を複素数まで拡張すると、これらは本質的に同じものなので。(ただしこの授業では深入りしない)
- 逆三角関数や双曲線関数を導入することの「メリット」を聞く質問が多数ありました。メリットを聞く人にはメリットはないかもしれません。
- “:=”の意味の質問が複数ありました。講義ノート5ページ、脚注17。

■前回までの訂正

- T2SCHOLA上の6月11日の講義の黒板が別科目のものだったので差し替えました。ご迷惑をおかけしました。
- 講義資料1, 2ページ, 2行目: $105 \times 210\text{mm} \Rightarrow 148 \times 210\text{mm}$.
- 講義ノート, 5ページ, 上から4行目: 負でない実数に対して \Rightarrow 負でない実数 x に対して
- 6月11日, 黒板B, 5/9: $\cot x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ($x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ のときに値0とするため)
- 6月13日, 映写資料B; 黒板B, 関数 f が, 区間 I 上のすべての点で正の値を取るならば \Rightarrow 関数 f の導関数 f' が, 区間 I 上のすべての点で正の値を取るならば

■授業に関する御意見

- わかりやすい, というご意見が複数。わかりやすい講義やよい講義なんじゃないかな。
- 休憩があるのが有り難いというご意見を複数いただきました。
- 教室のエアコンが寒かったとのご意見が複数ありました。山田は「動いている」のであまり気が付かないので皆さんで調節してください。講義室内の気温の不均一も問題かもしれません。
- 数学用語の語源の説明はかなり興味深いです。数学の歴史や背景が反映されているように感じます。山田のコメント たいいていいいかげんな話です
- 数学に関する豆知識的な話を途中してくれるから, おもしろい 山田のコメント あまり真に受けないように
- ときどきはさまれる雑談や休憩が気分転換になるので良かった。 山田のコメント あまり期待しすぎないように
- 数学に関する小話が面白かった。 山田のコメント そうでしょ
- ユーモアを交えた(と感じるような)講義(間違えませぬよ)で楽しく聴けました。(媚び売りではないです) 山田のコメント: よしよし
- 授業が面白いです。 山田のコメント そう?
- 教えるのが計算方法だけでないところがよいと思った。 山田のコメント そりゃそうだ。
- 微積はがんばります。 山田のコメント ですね
- 黒板を残してくれるのがとてもありがたいです。これからもよろしく願います。黒板の数字がたまに小さくて見えにくいので, 大きくしてくれると大変助かります。 山田のコメント 手書きのですか, フォントのですか?
- 映像を残してくださるのは授業の復習をする際にとても役立つのでありがたいです。 山田のコメント はい
- なぜシラバス通りの順番で授業しないのか疑問に思った。(批判的なニュアンスではなくて) 山田のコメント 共通シラバスですが, 少しやりやすいようにいじりました。
- 教科書の順に従うわけではないですか? 山田のコメント 11日に説明したとおりシラバスが特殊なので

- もう少し板書を繋ぎ文字にしないで書いてくださると見えやすくなるのと、少しページをめくるのがはやいのでゆっくりしてくださると助かります。 **山田のコメント** Sorry
- 逆三角関数の定義がややこしく、まだ慣れないので、演習問題を通して慣れていこうと思います。多くの新しい記号が出てきたので、ちゃんと整理しておこうと思います。 **山田のコメント** はい
- 授業資料がたくさん用意されておりわかりやすいですし、先生のお話が面白いので楽しんで学ぶことができています。あと、授業中に途中休憩があるのがとてもありがたいです。 **山田のコメント** はい
- 興味深い話が多くて楽しいです。黒板フォルダに書き込む前のパワーポイントを事前に頂けたら自分でもメモを取りやすくなるのでありがたいだろうなと思いました **山田のコメント** 映写資料はあがってます
- 1行の質問でも授業に関係し意味が通るものであれば3点満点として扱いますか？ **山田のコメント** 意味が通じればね
- たとえば「13日の映像資料Cの6枚目と7枚目において、定数 x が積分変数としても用いられています」のような、授業中にすでに訂正された誤りの指摘の需要はありますか？ **山田のコメント** いいえ
- 今回私はTeXファイルのハックによってこの課題を書いたので、もともと個々にあった点線を削除し、多少それぞれの欄の大きさを変えました、A5版に収めていけば問題ないですか？ **山田のコメント** はい
- 6/13 14:00時点でT2SCHOLAにアップロードされている6/11の黒板ファイルがまだ違う講義のファイルのままなので本来の講義のファイルにすぐ替えていただければ幸いです。 **山田のコメント** はい
- マイクの音量がもう少し大きいといいと思います。無論聞こえてはいますが、スピーカーの性能の所為か、少し聞き取りにくい感がありました。これからもよろしく願います。 **山田のコメント** 了解
- 面白い授業でした。 **山田のコメント** はい
- 特にないです **山田のコメント** me too
- 非常に分かりやすかったです！ **山田のコメント** はい
- 講義資料(原文ママ)が分かりやすくて予習、復習の際にとても役立ちます。ありがとうございます。 **山田のコメント** (議が)ちがうよ！
- 前回の線形代数の授業はひたすら黒板の板書を書く感じだったので、資料を挙げてもらえるのはありがたいです。 **山田のコメント** はい
- ゆっくり目の授業なので、とてもわかりやすいです。 **山田のコメント** すぐはよくなる w

質問と回答

質問 1: $x \in \mathbb{R}$ は「 x は実数全体の集合の要素」という意味ですが、これは「 x は実数全体の集合の元」と同じ意味でしょうか。 **お答え:** はい

質問 2: 実数を数直線上の点と対応させることで定義していますが、そもそも「数直線」(長さ)を先に考えている時点で循環論法になっているのではないのでしょうか。(数直線、長さというのは、そもそも実数を使ったものなので、実数を定義する道具として数直線、長さを使うのは違和感があります...)

お答え: はい、なので実数の定義はこの講義の範囲を超えます

質問 3: Wiki でマチン型の公式を色々見てみました。数は複雑ですが、もし公式が与えられたなら、講義内で言われていた“atan2”と、複素数と、テイラー展開を用いた不等式による評価で、証明することができると考えました。しかしどうしてその数たちで公式が成り立つとわかったのかが気になります。なにか効率の良い見出し方があれば、教えていただきたいです。/ 逆関数の \tan^{-1} で成り立つ公式であるマチンの公式はどのように考えて 239 という数字は出てくるのでしょうか。

お答え: たとえば $4 \tan^{-1} \frac{1}{5}$ は 1 よりちょっと大きい。そこで $\tan(\frac{\pi}{4} - 4 \tan^{-1} \frac{1}{5})$ を計算してみなさい。

質問 4: 結局のところ積分はどのように初めて定義されたのですか？ **お答え:** 初めてはどのあたりを想定しますか？

質問 5: 1変数関数のグラフにおいて講義ノート4ページに「関数 f が“性質の良い”関数ならばそのグラフは座標平面の曲線になる。」と記載されていますが、“性質の良い”関数とはどのような関数であるのか知りたいです。よろしく願いいたします。 **お答え:** 曲線の定義による。5ページのグラフをみよ。

質問 6: $\cosh^{-1} x, \sinh^{-1} x$ を求めることについて(代表として $\cosh^{-1} x$ をとりあげます。) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($x \geq 0, y \geq 1$) より、 $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$ となりますが、ここから条件を満たすものが $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ のみであることをどのように示せばよいかわかりません。 **お答え:** 定義: $y = \cosh^{-1} x$ ($x \geq 1$) $\Leftrightarrow x = \cosh y$ ($y \geq 0$) このとき $e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ だが $(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1$ なので、大きいほうが1以上。

質問 7: 逆関数の導関数の導入は逆関数の微分から間接的に得られることがわかった。逆関数の導関数を直接計算する方法が存在するのかが疑問に思った。 **お答え:** 一般論? それとも特殊な関数について?

質問 8: 円周率の近似の部分で用いたテイラーの定理についてテイラーの定理からテイラー展開を導出する際、なぜ $R_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) である必要があるのか。 **お答え:** 誤差が0に近づかなければ近似とは言えない

- 質問 9: 逆三角関数はどうして Cos^{-1} であらわすのですか? $\text{Cos}^{-1} = \frac{1}{\text{cos}}$ みたい. **お答え:** ですよ. 因習です.
- 質問 10: テキストの例 1.1 で x を x^2 に対応させる関数 f の値域が \mathbb{R} となっているが, 全ての实数 x に対して $x^2 \geq 0$ であるから f の値域は, 0 以上の実数となる. **お答え:** いいえ
- 質問 11: 双曲線関数は指数関数で表された関数で, 三角関数と似た性質を持つそうですが, どのあたりが似ているのでしょうか? **お答え:** 加法定理が似ていませんか?
- 質問 12: 逆三角関数を書くときに, $\text{Cos}^{-1} x$ のように最初の文字と大文字にする意味は何なのか? **お答え:** 「主値」
- 質問 13: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ を正割, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ を余割とよぶが, このように呼ばれる理由, 由来は何なのか?
お答え: 正弦, 正接とともに調べてください
- 質問 14: 答えに書くときは指定がなければ $\sinh x$ や $\sec x$ などを用いて回答してよいのか? **お答え:** あってれば良い.
- 質問 15: 逆三角関数において $x = \tan y$ の y の定義域に $y = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ が含まれないのはなぜですか?
お答え: $\tan(\pm\frac{\pi}{2})$ は存在しない.
- 質問 16: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ と双曲線関数が, 三角関数と似た性質を示すのはオイラーの公式が成り立つからですか? **お答え:** どのオイラーの公式ですか?
- 質問 17: ガウス関数が初等関数でないことは何を学ばせようになりますか. あとどんな概形ですか?
お答え: 「ガウス関数」で何を指していますか? ガウスの誤差関数のこと? 概形とはなんですか?
- 質問 18: 三角関数を用いて円や双曲線といった 2 変数関数を表せるのなら同じ 2 変数関数である放物線とかも表せるのか気になった. **お答え:** 円は 2 変数関数なのですか? そもそも関数ですか? 「気になった」として質問は何?
- 質問 19: この授業においては $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$) なる関数 f の積分について扱うとありましたが, $f: I \rightarrow V$ ($I \subset \mathbb{R}, V$ はベクトルの集合) である f についても同様であるか否かと, \mathbb{R} の部分集合とは限らない集合 J の関数 $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ について積分を考えることはできるのかがどうかが気になりました.
お答え: V はベクトル空間でしょうか. 重積分. この講義でやる.
- 質問 20: 映写資料の 13 日, B, 5 ページは f' が正ということか. また, 平均値の定理をどのように用いるのか.
お答え: Thanks, 証明見たことないですか?
- 質問 21: e は $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ を満たす値で, 他の a^x ($a \in \mathbb{R}$) より微分, 積分しやすいので微積分で特別扱いされた値です. それでは, e^x は双曲三角関数 (原文ママ) で現れますか? (偶然?) e は微積分のために発明された値じゃないですか? **お答え:** $\frac{a^x + a^{-x}}{2}$ などを考えてもいいけど微分公式が難しくなりますね.
- 質問 22: e (ネイピア数) の定義は自然対数の底とすると定義が循環するという話があったが, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ で定義されているのではないかと思った. **お答え:** 定義でなく呼び名についての話だった.
- 質問 23: $\sec x$ の原始関数を導くときに, $t = \tan \frac{x}{2}$ と置換して, t の有理式にして積分するが, この考え方はどのようにして思いつくのが疑問です. **お答え:** 定石, 昔思いついた人がいた
- 質問 24: 自然数全体の集合 \mathbb{N} は 0 を含むときと含まないときがあり, それは文脈によって変わるとおっしゃっていたが, どのような場面で 0 が必要になるときが出てくるのですか? **お答え:** 何が必要?
- 質問 25: $\frac{1}{1+t^4}$ を部分分数分解したとき $\frac{1}{1+t^4} = \frac{(1\text{次式})}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} + \frac{(1\text{次式})}{t^2 + \sqrt{2}t + 1}$ のように分母が 1 次式になるとおっしゃっていましたがその理由がわかりません. **お答え:** 少し面倒ですが Wikipedia 「部分分数分解」に解説がありますね.
- 質問 26: 逆関数についての質問です. y が x の関数であるとき, x の値 1 つにつき y の値も 1 つに定まるので, 逆三角関数は定義域や値域を限定する必要があり, $y = \text{Cos}^{-1} x$ を講義ノートは $x = \cos y$ かつ $0 \leq y \leq \pi$ としていましたが, $0 \leq y \leq \pi$ というのは定義として決まっているものなのかわかりません. **お答え:** 定義です
- 質問 27: まだ初等関数の定義についてなので, 自分の理解不足が原因だと思いますが, 逆三角関数の捉え方が十分に理解できていません. 今まで三角関数でなっていたのにどうしてわざわざ逆関数で考え直すのだらうと思いました.
お答え: ちがうものなので考え直してはいません
- 質問 28: 一般に関数の定義域の端点では微分不可能なのでしょうか. その場合, 端点の特別な微分可能性が存在するのでしょうか. **お答え:** はい, 時間があつたらどこかで説明するかもしれません
- 質問 29: \mathbb{R} ~ real numbers, \mathbb{C} ~ complex numbers, \mathbb{N} ~ natural numbers などは, それぞれの頭文字の英語の文字から表されているのに, \mathbb{Z} ~ Zahlen はドイツ語から由来しているのでしょうか. **お答え:** そう, 理由は知りません.
- 質問 30: ネイピア数 “ e ” は $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ と定めただけで, なぜこれほどまで数学界において大変重要な公式や関数などに使われていて, かつ整合的に組み立てられているのですか. **お答え:** どちらが先でしょうね.
- 質問 31: ライプニッツ級数やパーゼル問題について, なぜきれいな整数しか出てこない分数の加減によって円周率が出てくるのですか. **お答え:** 3.141592... も各桁に整数しか出てきません

- 質問 32: 関数を微分したら正になると単調増加というような曖昧な定義は不適当とおっしゃっていたが問題を解く際にこの定義は十分に厳密さを保っているかと判断するにはどうしたらよいか? (コツが知りたい) 自分の頭の中には典型例しか浮かばないので自分のおいた定義が仮に間違っていたとしてもその定義が自明と信じて問題を解き進めてしまう. **お答え:** 定義ではない. あなたの典型例は本当に典型ですか?
- 質問 33: $\sinh x$ や $\cosh x$ は e^x を用いて表すことができるが, $\sin x$ や $\cos x$ を別の関数を用いて表すことができるのか? **お答え:** $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
- 質問 34: 三角関数の加法定理の証明では余弦定理などを用いましたが, 双曲線関数の加法定理の証明は定義である $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ を代入する方法以外のやり方はありますか? **お答え:** 微分する方法がある.
- 質問 35: 関数を $f, f(x)$, 三角関数を $\sin x, \sin$ と書くことのいづれかに誤りはありますか. **お答え:** 文脈に依る
- 質問 36: 参考書「理工系のための微分積分学」では, 微積分学の基本定理として $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ が説明されていますが, 授業では系として扱われました. (授業では, $F(x) := \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$). 微積分学の基本定理として正しいのはどちらですか? **お答え:** どちらでもよくて (内容が同じなので) その文脈に依る
- 質問 37: 自然数という言葉は本来は「非負整数」「正の整数」のどちらの用途で使われていたのでしょうか?
お答え: 0 の発見以前に natural numbers ということばはあったのか?
- 質問 38: 11 日の講義の途中で少しだけ $\sin x$ や $\cos x$ の e^{ix} を用いた表記について触れられていましたが, 虚数乗という操作のイメージが掴めません. この公式のために新しく定義しているのでしょうか? **お答え:** ふれたっけ?
- 質問 39: 逆三角関数の表記についてです. 講義資料での表記は $\text{Sin}^{-1} x$ で統一されていますが, テストや課題で私が $\arcsin x$ のように講義資料と異なる表記を用いた場合減点対象になりますか?
お答え: 問題文に合わせるべき. ただし正しければ減点しないと思う.
- 質問 40: 三角関数の合成公式について「定数 a, b に対し, $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$ 」とありましたが, これは誤りだと思います. 正しくは, 「 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ をみたす定数 a, b に対し,」であると私は思います. なぜならば, $a = b = 0$ のとき, α が定義されないからです.
お答え: 何でも良いのでは? もちろん α の値を書きってしまったら $(a, b) \neq (0, 0)$ としなければならぬけど.
- 質問 41: $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$ と $4 \arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) = \frac{\pi}{4}$ のように, $\arctan(x)$ のかんたんな線型結合で表される式は右辺が $\frac{\pi}{4}$ の他にも存在しますか? **お答え:** 講義で述べたように「マチン型公式」で検索せよ
- 質問 42: 授業中, $f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ の導関数を求める例題がありましたが, x の定義域を $-1 < x \leq 1$ ではなく $-1 < x < 1$ にした理由がありますか? $x = 1$ でも $f_1(x)$ は定義できると思われました.
お答え: でも微分可能でない (といったはず)
- 質問 43: 掛け算九九は誤字です. 正しくはかけ算九九です. 「掛」という漢字は小学 2 年生には読めません.
お答え: 講義では小学生といった.
- 質問 44: C^1 級があるなら C^2 級とか D^1 級はありますか? / C^1 級があるなら, C^2 級もありますか.
お答え: C^2 は講義で扱う. D もあるらしい.
- 質問 45: 二次曲線の 1 つである放物線は $\sin t, \cosh t$ のような関数を使ってパラメータ表示できますか.
お答え: やらうと思えばできるのでは?
- 質問 46: $\text{Sin}^{-1} x$ を $\arcsin x$ と表記すると授業で教わったと思うのですが, arc はどんなことを意味しているのでしょうか. **お答え:** 弧
- 質問 47: 例 1.2 の (2) で, 負でない実数に対して「平方して x になる実数」と対応させるのが関数とみなせないとおあるが, $f: x \mapsto f(x) = \pm\sqrt{x}$ とすれば 4 に対しても 2, -2 どちらも対応できる関数になるのではないかと思った.
お答え: 値が「ひとつ」決まることが必要.
- 質問 48: 初等関数の導関数は初等関数であることがすぐにわかるが, 初等関数の原始関数は初等関数とは限らない理由がわからなかったです. **お答え:** そういう例があるから. ただしそれが例であることの証明は難しい.
- 質問 49: 授業中におっしゃっていた根と解はどう違うのか. **お答え:** “多項式の根”, “方程式の解” と使い分ける.
- 質問 50: 黒板に $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$ と書かれたいたと思うのですが, $-\sinh x$ であると思います. **お答え:** 違います
- 質問 51: 高校ではなぜ定積分を先に定義しないのですか? **お答え:** 大変だからだと思う
- 質問 52: 定理や補題, 系等の言葉の意味について触れた際に, 「定理とは (重要な) 事実である」と説明されていたが, 講義の最後において, 「積分 $\int R(\cos t, \sin t)dt$ は, $\tan \frac{t}{2} = u$ なる置換により有理関数の積分に帰着される」ことが「事実」とであると記載されていました. これは先に述べた「定理」とは異なる意味なのでしょうか.
お答え: はい, あまり正確にステートメントを書いていないので

質問 53: 定理が事実なら, 定理から導かれる系も事実であると思う. 定理と系を区別する理由がわからない.

お答え: 講義で「広義の定理」といいましたよね

質問 54: 講義ノート 1 の命題 1.10(2) (p.8) で, 双曲線関数の加法定理 $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,
 $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$ とありますが, なぜ通常の三角関数の加法定理 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
 $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ のように, 符号がマイナスのところは双曲線関数ではなぜプラスに変わるのか教えてほしいです. お答え: やって見たらそうなる.

質問 55: 私は逆三角関数の計算で, 授業中に出てきた $\tan^{-1}(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{8}$ について, $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ を覚えたい
 なかったため, 自力で求めることができないと感じたのですが, 逆三角関数は代表角や結果がわかっている角度
 についてしか私達は自力で計算できないのですか? それとも, $\cos^{-1} x, \sin^{-1} x$ のときは $x \in I$ ($I = [-1, 1]$),
 $\tan^{-1} x$ のときは $x \in \mathbb{R}$ をそれぞれ満たす x ならばどのような x でも計算できるのか, どちらなんですか? 計算
 できる場合は計算方法も教えていただければ幸いです.

お答え: たとえば \tan (逆でなく, 高校生の知ってる \tan) だったらどんな角でも計算できますか?

質問 56: 虚数(虚数単位?) i は存在しない数で大きさもないのに, どのように周囲に認められる数となったのですか?

お答え: 実数は存在しますか? それとおなじくらい i も存在します.

質問 57: 双曲線関数は三角関数と類似の性質を持つために, \cosh となどと三角関数に似た形にわざわざ置くのかという
 疑問. お答え: 言い回しがわからない

質問 58: 初等関数において授業で示されていた双曲線関数以外に高校数学で習っていない関数には何がありますか.

お答え: 逆三角関数

質問 59: 逆三角関数は一つの x に対して 2 つの y が出てきてしまうために値域があるとおっしゃっていたが, 陰関数の
 ように扱うことはできないのだろうか. お答え: 扱ってもよいがそれは関数ではない.

質問 60: なぜ双曲線関数は「 $\sinh x$ 」「 $\cosh x$ 」などと呼ばれるんですか? お答え: hyperbolic sine など

質問 61: e^x を用いて表されたものを \sin や \cos , \tan を使って表していることが疑問です. $\sinh x, \cosh x, \tanh x$ と
 $\sin x, \cos x, \tan x$ になにか共通点があるのか知りたいです. 個人的には, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ という式や,
 $\sinh x, \cosh x$ の加法定理が似ているのかなと思います. また, 共通点があるのなら, $\sin x$ や $\cos x$ も e^x で表せる
 のかどうか気になります. お答え: 気にしてください, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

質問 62: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots$ の右辺の収束がどれくらい早いのか気になります. お答え: めちゃくちゃ遅い

質問 63: $\cot x$ や $\sec x, \csc x$ がどのような場面で役立つのかも気になります. お答え: 双曲線のパラメータ表示で \sec
 がでた.

質問 64: 課題に関する質問なのですが, 資料は意図的に誤りを作っているということなのでしょうか. それとも資料作
 成する上で間違える可能性があるという意味でしょうか. それと誤っている部分が 1 つありました. 2024/6/11 の
 黒板の資料を見たところ, 全て位相空間論の資料になっていました. 講義で $y = \cosh x$ のグラフは懸垂曲線を表
 すとおっしゃっていましたが, 東工大ではどの時期に扱うのでしょうか. 理学院物理学系に進みたいと考えている
 ので興味を持ちました. また, $4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ という等式はどのような背景があるのでしょうか.

お答え: いいえ, はい, Thanks, とくに扱わない, その近似

質問 65: 複素数は実数 \mathbb{R} で表すことができるのに, なぜ \mathbb{C} で表すのか? また, 複素数は実数の二次元であるのに対し,
 実数は実数の一次元である. 巷でいう, 「実数は複素数の一部」というのは次元で見るとある意味おかしいのでは
 ないか? 長さや面積を同一視している感覚がしてしまう. お答え: 「実数の 2 次元」という言いまわしはしませ
 ん. これは何を表していますか? 「実数は複素数の一部」は $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ という意味では?

質問 66: どうしてサスペンダーつけてるんですか? お答え: ズボンが落ちないようにするためです