微分積分学第一 (LAS.M101-06)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/20

数学相談室

東工大生を対象に、数学(数学系科目)に関わる質問、疑問に
教務支援員と数学系大学院生がお答えします．
ご都合にあわせて利用し、是非学修に役立ててください！

4月 April

月	火	水	木	金	土	日
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

5月 May

月	火	水	木	金	土	日
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

6月 June

月	火	水	木	金	土	日
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

2Q授業開始

※期末試験期間中も開室します！
（週1科目の予備日を除く）

7月/8月 July/August

月	火	水	木	金	土	日
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	8/1	8/2	8/3	8/4
8/5	8/6					

※期末試験期間中も開室します！
（最終日と週1科目の予備日を除く）

開室日

◇2024年度 前期 対面相談室　実施概要◇

開室曜日　(月)・(火)・(水)・(木)・(金)　※上記カレンダーをご参照下さい
開室時間　16時00分～18時00分
場　所　Taki Plaza 地下1階　相談ブース

予約不要です．お気軽にお越しください！
※荒天時は閉室することがあります．

2024年 3月
数学事務室

1 変数関数の微分

- $I \subset \mathbb{R}$：開区間　かんたんのため．（$I = \mathbb{R}$ のケースも含む）
- $f : I \to \mathbb{R}$：関数
- $a \in I$

f(x) が x=a で微分可能

$\boxed{\text{定義}}$: f が a で微分可能であるとは，極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在することである．この極限値を f の a における微分係数といい，$f'(a)$ と書く．

・分数でない

・分数と思って計算してよい

・合成関数

・置換積分

$\boxed{\text{定義}}$: f が I の各点で微分可能なとき，関数

$$f' : I \ni x \longmapsto f'(x) \in \mathbb{R}$$

を f の導関数という．

・$f' = \dfrac{df}{dx}$

・$y = f(x)$

$f' = \dfrac{dy}{dx}$

例

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

微分公式

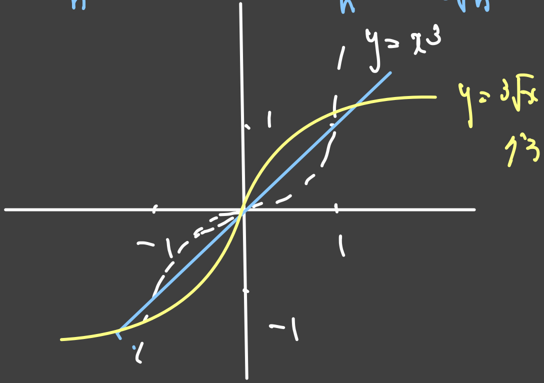
$\cdot\ f'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \quad (x \neq 0)$

Claim f は 0 で微分可能でない.

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} \xrightarrow{h \to 0} +\infty$$

$\square$

f のグラフ



グラフはなめらかな曲線

例

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

Claim f は 0 で微分可能で

$f'(0) = \frac{1}{2}$

$\because$) $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{1}{2}h + h^2 \sin\frac{1}{h}}{h}$ $\quad (h \neq 0)$

$= \frac{1}{2} + h \sin\frac{1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2}$ $\square$

$h \sin\frac{1}{h} \to 0$ as $h \to 0$

$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$(x \neq 0)$

多変数関数

主に2変数関数

- $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

あとで仮定をつける

- $D \subset \mathbb{R}^2$

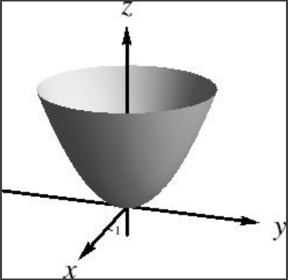
Dの要素　Dの点

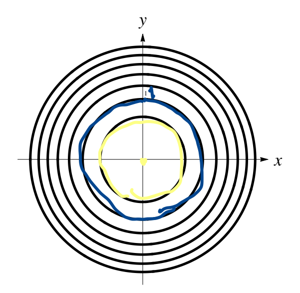
$$f\colon D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R} \qquad \text{(2 変数関数)}$$

$$\begin{cases} f \text{ のグラフ} := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3 \\ f \text{ の高さ } c \text{ の等高線} := \{(x, y) \mid f(x, y) = c\} \subset D \subset \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

例

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$





graph

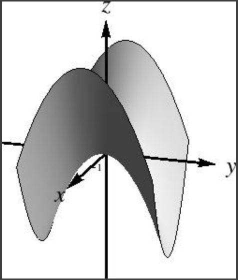
高さ1の時等高線 : $x^2+y^2=1$

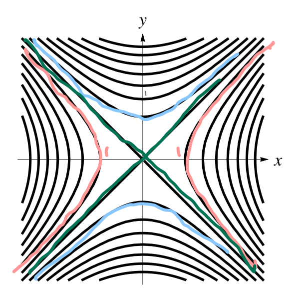
$\frac{1}{2}$ $\qquad x^2+y^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

0 $\qquad : \{(0,0)\}$

例

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$





$\begin{cases} x-y=0 \\ \text{or} \\ x+y=0 \end{cases}$

$1: \quad x^2-y^2=1$

$-1: \quad x^2-y^2=-1$

$0: \quad x^2-y^2=(x-y)(x+y)=0$

例

- 東経 x 度，北緯 y 度の地点の標高を $h(x,y)$ メートルとすると，$h(x,y)$ は x と y の 2 変数関数である．
- いまこの瞬間の，東経 x 度，北緯 y 度の地点の地表における気圧を $p(x,y)$ ヘクトパスカルとすれば，$p(x,y)$ は x と y の 2 変数関数である．

多変数関数の変化の様子

- 増減？ Nonsense
- グラフ？ めんどくさい.
- 等高線？

微分法をつかって計算でどこまでわかるか.