微分積分学第一 (LAS.M101-06)

多変数関数と偏微分

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/20

偏微分可能性

連結開集合　ちゃんと定義しない

ひとつづき　はじがない

- $D \subset \mathbb{R}^2$：$\boxed{\text{領域 a domain}}$; $\mathrm{P} = (a, b) \in D$
- $f\colon D \to \mathbb{R}$：2 変数関数

$D \ni (x, y)$

定義

- f が P で x に関して偏微分可能 であるとは極限値

固定

yをとめて

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

xのみの関数と思って微分

が存在すること．

固定

- f が P で y に関して偏微分可能 であるとは極限値

x --

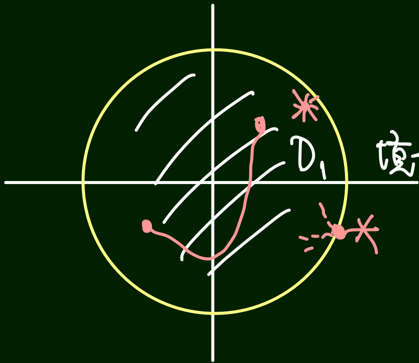
$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

y --

が存在すること．

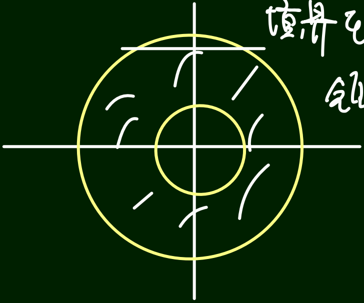
$\mathbb{R}^2$　　$\mathbb{R}^2$全体

$D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$

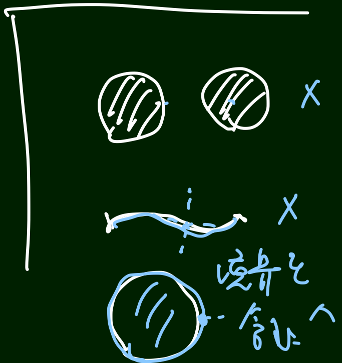


境界を含まない

各点で好きな方向に
少しはうごける。



境界を含まない
領域



偏微分係数

- $D \subset \mathbb{R}^2$：領域；$\mathrm{P} = (a, b) \in D$
- $f \colon D \to \mathbb{R}$：2 変数関数
- f が P で（x, y に関して）偏微分可能

定義

f' は使わない

極限値　(紫 一変数)　(微分する変数を明示する必要がある)

d は使わない

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h},$$

$$f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) := \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}.$$

を，それぞれ f の P における x に関する偏微分係数, y に関する偏微分係数という．

偏微分記号

流体力学

($\frac{d}{dt}$ 特殊な ビブン

Euler微分)

をつかうことがある.

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

"round d"

"d"

多変数関数の偏微分という意味で d は使わない

偏導関数

- $D \subset \mathbb{R}^2$：領域；$\mathrm{P} = (a, b) \in D$
- $f\colon D \to \mathbb{R}$：2 変数関数
- f が D の各点で（x, y に関して）偏微分可能

定義

2 つの 2 変数関数

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D \ni (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \in \mathbb{R},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : D \ni (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in \mathbb{R}$$

を各々 f の x に関する偏導関数, y に関する偏導関数 という.

偏微分する ＝ 偏動関数を求める

偏微分の計算

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

y を一定にたもって

一変数関数 $x \longmapsto f(x,y)$ を微分する

一定

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

x を一定にたもって …

例

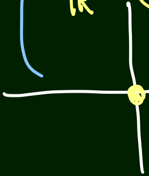
$$f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$$

定義域　ℝ²から(0.0)をぬいた

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ (x,y)\neq(0,0)\}$

定数と思う

$\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right.$ 集合の引きざん$\left.\right)$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

定数

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$$

定義域 $\{(x,y) \,;\, x \neq 0\}$

$x>0$

領域

y

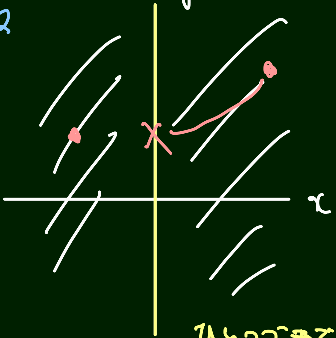
$$f_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

定数

$$= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$f_y = \frac{x}{x^2+y^2}$$



ひとつづきでない

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tan}^{-1} t = \frac{1}{1+t^2}$$

例

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

すべての点で偏微分可能

$$\begin{cases} f_x = \cdots \text{微分公式} \cdots = & - & (x,y) \neq (0,0) \\ f_y = \quad \cdots & = & \cdots \end{cases}$$

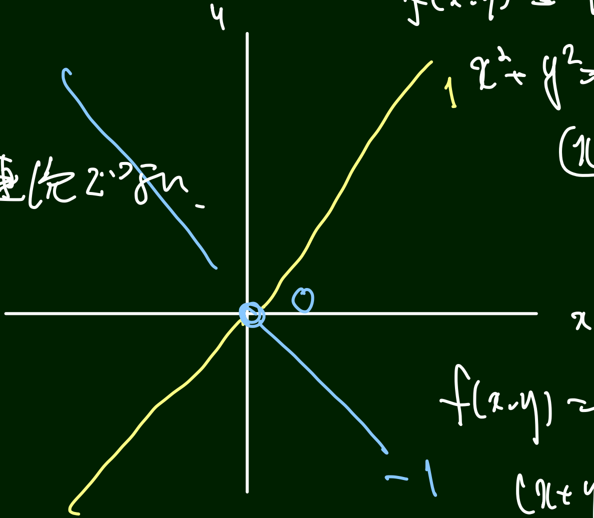
$h \neq 0$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2h \cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = 0$$

つん

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



(0.0)で連続でない

$f(x.y) = 1$

$x^2+y^2 = 2xy$

$(x-y)^2 = 0$

$(x.y) \neq (0.0)$

$f(x.y) = -1$

$(x+y)^2 = 0$