微分積分学第一 (LAS.M101-06)

多変数関数と偏微分

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/20

偏微分可能性

- $D \subset \mathbb{R}^2$：領域 a domain；$\mathrm{P} = (a, b) \in D$
- $f\colon D \to \mathbb{R}$：2 変数関数

定義

- f が P で $\underline{x\text{ に関して偏微分可能}}$ であるとは極限値

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

  が存在すること．

- f が P で $\underline{y\text{ に関して偏微分可能}}$ であるとは極限値

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

  が存在すること．

偏微分係数

- $D \subset \mathbb{R}^2$：領域；$\mathrm{P} = (a, b) \in D$
- $f : D \to \mathbb{R}$：2 変数関数
- f が P で（x, y に関して）偏微分可能

定義

極限値

$$f_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h},$$
$$f_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) := \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}.$$

を，それぞれ f の P における x に関する<u>偏微分係数</u>, y に関する<u>偏微分係数</u>という.

偏導関数

- $D \subset \mathbb{R}^2$：領域；$\mathrm{P} = (a, b) \in D$
- $f \colon D \to \mathbb{R}$：2 変数関数
- f が D の各点で（x, y に関して）偏微分可能

定義

2 つの 2 変数関数

$$\frac{\partial f}{\partial x} \colon D \ni (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \in \mathbb{R},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} \colon D \ni (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in \mathbb{R}$$

を各々 f の x に関する<u>偏導関数</u>, y に関する<u>偏導関数</u> という．

偏微分する $=$ 偏動関数を求める

偏微分の計算

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

例

$$f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

例

$$f(x, y) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$$

例

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$