微分積分学第一 (LAS.M101-06)

多変数関数と偏微分

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/20

高階の導関数（1 変数）

- $I \subset \mathbb{R}$：開区間；$f\colon I \to \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{df}{dx}, \\
f'''(x) &= \frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{d}{dx}\frac{d^2 f}{dx^2}, \\
&\vdots \\
f^{(m)}(x) &= (f^{(m-1)})'(x) = \frac{d}{dx}\frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}}, \dots
\end{aligned}
$$

2次導関数
2階微分

- $D \subset \mathbb{R}^2$：領域；$f : D \to \mathbb{R}$

xy の並び順がちがう.

4つ

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$$

実は気にしなくてよい.

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

高階偏導関数

3次

8こ

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \quad \cdots$$

順序交換をみとめると　4こ

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

例

(定数)

$f(x, y) = x^3 - 3x^2 y + y^5$

$f_x = 3x^2 - 6xy$

$f_y = -3x^2 + 5y^4$

$f_{xx} = 6x - 6y$

$\boxed{f_{yx} = -6x}$

$\boxed{f_{xy} = -6x}$

$f_{yy} = 20y^3$

この例では $f_{xy} = f_{yx}$

偏微分の順序交換定理

f : 2変数関数

$\boxed{\text{たいてい}}$ $\quad f_{xy} = f_{yx}$

- 次回仮定をのべる
- きれいな式でかけているものはOK

例

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_{xy} = \frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}} \qquad f_{yx} = \frac{-yx}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}}$$

(− [illegible])

偏微分の順序交換

例

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

3変数関数

f_x （y, zは定数とみて） f_y f_z

$$= -\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{etc}$$

（Laplaceの方程式）

◎ $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$

Δf laplacian

例

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi c t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right)$$ （c は正の定数）

熱方程式（1次元）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

t 時刻

x 位置

$u(t,x)$ 温度

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\,dx = 1$$

（tによらず）

あとでやる

$$\theta(x,y) = 4\,\mathrm{Tan}^{-1}\exp\left(ax + \frac{y}{a}\right)$$ （a $(\neq 0)$ は定数）

Q

$$\theta_{xy} = \sin\theta$$

Sine Gordon equation

課題

- 講義資料や講義の誤りの指摘
- 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙で T2SCHOLA に
締切：6 月 20 日 (本日) 17:00 JST