微分積分学第一 (LAS.M101-06)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/25

お知らせ

- 今回は期限までに 85 名の方から課題の提出がありました．
T2SCOLA からフィードバックを行っています．
なお，用紙に記入されているコメントは山田用のメモです．
読めない字があるかもしれませんが，この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください．

- 提出物のフォーマットが PDF でなかった方が１名．採点していません．

- 気になりました，イマイチなどまだ複数の方が使っておられます．

ご意見から

- 火曜の講義は毎回，大部分が質問についての話ですか？

- なぜ授業ごとに質問をすること義務なんですか．また質問が思いつかなかった場合はどうすればよいでしょうか．

- 数学の教授に質問するのが大変恐縮ではありますが，このような機会はなかなかないので，質問するのを頑張りたいと思います．

- 質問や指摘に対してのコメントがきつい．

補足

- 「偏微分の図形的な意味」を問う質問が多数ありました.
- イメージ，直感，可視化

・図形的意味；イメージ；直感
現時点では副次的なもの（定義）
・微分係数は，$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ のことで
・関数の傾きというのは副次的なもの．
のグラフの接線
・可視化とは？

$f(x, y)$

・ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$

1変数関数としての微分 $= \left.\dfrac{dF}{dx}\right|_{x=a}$ 　 $F(x) = f(x, b)$ 　 ← 一定

グラフ $G = \{(x, y, f(x, y))\} \subset \mathbb{R}^3$

上で $y = b$ とおいた図形

$\{(x, b, f(x, b))\}$ 　 $F(x)$

の "高さ" が F 　 $\mathbb{R}^3$ の平面

$\underline{G \cap \{y = b\}}$ 上での高さが F

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$: "切り口" の接線のかたむき.

Q and A

Q: f_{xy} と f_{yx} はたいてい同じですが，例えば「f_{xy} を計算せよ」という問があれば f_{yx} の計算過程を書けば問題に従わないので減点ですか？

・忍がな…

- 答が合っていれば正解．
- もし計算過程を問うなら，それが解答に現れるような設問をする．

Q and A

Q: 常微分方程式をとくのはいくつかの型をおぼえてそれぞれ対応すればいいですが（山田注：そんなに甘い物ではない）偏微分方程式は常微分方程式よりさらに多彩なものだと思っているので，ただ型を覚えるだけでは対応できないと思います．偏微分方程式をとくにあたってどのような姿勢で取り組むべきでしょうか．

解けるものも解けないものもある．

（"解"とは何か）

Q and A

(曲面を定義していない

Q: 講義ノート 2 の 14 ページで，2 変数関数に対して「関数 f が性質のよい関数ならば，そのグラフは座標空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面になる」とあるが，これは 3 変数関数などの n 変数関数 $n \geq 3$ にも当てはまりますか.

n 変数関数 : $\mathbb{R}^{n+1}$ の超曲面

hypersurface

$\mathbb{R}^{n+1}$ の中の "n 次元的な拡がりをもつ" 図形

n 次元部分多様体.

Q and A

Q: 関数 $f\colon D(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ の値がすべての変数に依存するとは限らない場合であっても f は n 変数関数なのでしょうか．（例えば $f(x,y) = x$ とするとき，y は関数の値に影響を与えないが，このときも f は 2 変数関数であるのでしょうか）．

偏微分の順序交換

$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$1 - \dfrac{2y^2}{x^2+y^2}$

$f_{xy} = (f_x)_y$

$(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x = \begin{cases} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\left(\dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ \boxed{0} \end{cases}$$

$(x,y) = (0,0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1.$$

$$f_{yx}(0,0) = +1.$$