微分積分学第一 (LAS.M101-06)

連続性と微分可能性

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/25

Q: 定数関数の導関数は 0 という認識が誤りであるという話がありましたが，その説明が理解できませんでした.

正しい

- 1点でない区間 I で定数である関数の導関数は 0

ひとしい

$$\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \right)$$

Q: 値域と像の違いを詳しく教えて下さい．

値域：想定される値のとりうる範囲．
広めにとることも可

$f(x) = \sin x$

値域： $\mathbb{R}$．

$[-1, 1]$

~~$[-2, 2]$~~

いろいろえらべる

像：実際にとる値の範囲．

$f(x) = \sin x$
$(x \in \mathbb{R})$

：像： $[-1, 1]$

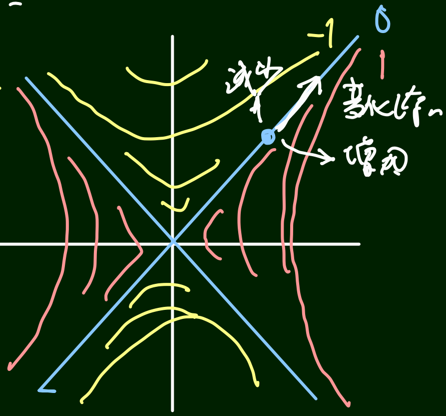
ひととおり

Q and A

Q: 「多変数関数の変化の様子」で増減が Nonsense なのは大変で面倒くさいからですか？

いいえ. 無意味だから.

$f(x,y) = x^2 - y^2$



・(1,1) で f は増加するか減少するか?

意味がない

(領域) 講義ノート 34ページ

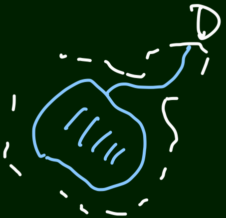
Q: 偏微分可能の定義を領域（かまたは開集合）にしぼっていたがそれはなぜでしょうか．どんな近いところでもその点自身以外の定義域が存在するような点（定義域の集積点）に対しても全微分や偏微分を定義して，領域や開集合でないと成り立たない定理はそのように述べ，そうでなくても成り立つものは一般的に述べた方が便利だと思うのですが，これだと難点が生じるのでしょうか．

領域 = 連結・開集合

微分可能性：

このはんいで D 微分可能

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Dを含む領域上の微分可能関数に拡張できる



Q and A

Q: 偏微分というものがあるならば，その逆の演算も存在しますか？ もし存在するならば，どのような方法で計算するのでしょうか？

α, β: given functions

$$\begin{cases} f_x = \alpha \\ f_y = \beta \end{cases}$$

をみたす f は存在する？

(原始関数？)

- そういう f は一般に存在しない。

もしあったとすると

$$\alpha_y = f_{xy} = f_{yx} = \beta_x$$

- ポテンシャルの存在条件
- ポアンカレの補題

復習：1 変数関数の連続性

定義

区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の 1 変数関数 f が $a \in I$ で**連続**であるとは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである．関数 f が定義域 I の各点で連続なとき f は I で連続である，あるいは**連続関数**であるという．

復習：微分可能性と連続性

定理

1 変数関数 f が a で微分可能ならば a で連続である.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left\{f(x)-f(a)+f(a)\right\}$$

$$= \left\{\lim_{x\to a}(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\} + f(a)$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} h\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) + f(a)$$

$f'(a)$

$$= f(a)$$

逆は正しくない

C^k-級関数

区間 I で定義された 1 変数関数 f が区間 I で

- $\boxed{C^0\text{-級}}$であるとは I で連続なこと， of class C^0
- C^1-級であるとは，I で微分可能で，導関数 f' が I で連続となること，
- C^k-級（$k > 0$ は整数）であるとは、f の k 次導関数 $f^{(k)}$ が存在して，それが I で連続となること，
- C^∞-級であるとは，全ての負でない整数 k に対して C^k-級であることとする．

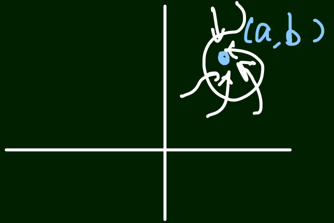
多変数関数の極限値

定義

2 変数関数 f の極限値が A, すなわち

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A \qquad \Big(f(x,y) \to A \qquad ((x,y) \to (a,b)) \Big)$$

をみたすとは (x,y) が**どのような経路で (a,b) に近づいても** $f(x,y)$ の値が A に近づくこと.



正確には "εδ" を用いる
(後期)

多変数関数の極限値

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A \qquad (*)$$

事実

- $(*)$ が成り立つための必要十分条件は，0 に収束する**任意の** 2 組の数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ に対して次が成り立つことである：

$$\lim_{n\to\infty} f(a+h_n, b+k_n) = A.$$

- $(*)$ が **成り立たない**ための必要十分条件は，$\{f(a+h_n, b+k_n)\}$ が A に収束しないように，0 に収束する数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ を**うまく選ぶことができる**ことである．