微分積分学第一 (LAS.M101-06)

連続性と微分可能性

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/25

多変数関数の極限値

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A \qquad (*)$$

事実

- $(*)$ が成り立つための必要十分条件は，0 に収束する**任意の** 2 組の数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ に対して次が成り立つことである：
$$\lim_{n\to\infty} f(a+h_n, b+k_n) = A.$$
- $(*)$ が**成り立たない**ための必要十分条件は，$\{f(a+h_n, b+k_n)\}$ が A に収束しないように，0 に収束する数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ を**うまく選ぶことができる**ことである.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)= ?$$ 存在しない.

$\because$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A$ とすると

① $A\neq 0$ のとき $h_n=\frac{1}{n}$, $k_n=0$ とおくと

$f(h_n,k_n)=0 \not\to A$ だめ

② $A=0$ のとき $h_n=\frac{1}{n}$, $k_n=\frac{1}{n}$

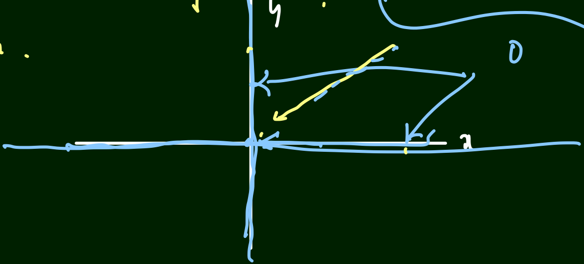
$f(h_n,k_n)=1 \not\to A$ だめ.

f が $(a.b)$ で連続

$$\overset{\text{定義}}{\iff} \lim_{(x.y)\to(a.b)} f(x.y) = f(a.b)$$

1変数関数の場合と同じ

前のページの f は偏微分可能だが原点で連続でない.



(座標軸の方向しか見ていない)

多変数関数の微分可能性

定義

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x, y)$ が $(a, b) \in D$ で**微分可能**であるとは，定数 A, B をうまくとり，十分小さい $(h, k) \neq (0, 0)$ に対して

$-(Ah+Bk)=$

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2+k^2}$$

により $\varepsilon(h, k)$ を定義すると，次が成り立つことである：

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0.$$

微分可能 $\Rightarrow$ 連続

命題

関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で連続.

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$\varepsilon(h,k) \to 0$

$(h,k) \to (0,0)$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k) - f(a,b) = 0$$

微分可能 ⇒ 偏微分可能

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}, \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k$$

命題

関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で偏微分可能で，$A = f_x(a,b)$, $B = f_y(a,b)$ でなければならない．

$k=0$

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

$$= A + \underset{\downarrow \atop 0}{\varepsilon(h,0)} \underset{\text{有界}}{\frac{|h|}{h}} \longrightarrow A$$

偏微分の順序交換定理

定理

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f の 2 つの 2 次偏導関数 f_{xy}, f_{yx} が存在してともに連続であるとき，$f_{xy} = f_{yx}$ が成立する．

- f_x f_y : 連続 $\Longrightarrow$ f : 微分可能

課題

- 講義資料や講義の誤りの指摘
- 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙で T2SCHOLA に

締切：6 月 27 日 17:00 JST