

微分積分学第一 (LAS.M101-06)

連続性と微分可能性

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/>

東京工業大学

2024/06/25

多変数関数の極限值

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A \quad (*)$$

事実

- ▶ (*) が成り立つための必要十分条件は、0 に収束する**任意の 2**組の数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ に対して次が成り立つことである：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a + h_n, b + k_n) = A.$$

- ▶ (*) が **成り立たない**ための必要十分条件は、 $\{f(a + h_n, b + k_n)\}$ が A に収束しないように、0 に収束する数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ をうまく選ぶことができることである。

多変数関数の微分可能性

定義

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x, y)$ が $(a, b) \in D$ で微分可能であるとは、定数 A, B をうまくとり、十分小さい $(h, k) \neq (0, 0)$ に対して

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

により $\varepsilon(h, k)$ を定義すると、次が成り立つことである：

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0.$$

微分可能 \Rightarrow 連続

命題

関数 $f(x, y)$ が (a, b) で微分可能ならば, f は (a, b) で連続.

微分可能 \Rightarrow 偏微分可能

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k) \sqrt{h^2 + k^2}, \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k)$$

命題

関数 $f(x, y)$ が (a, b) で微分可能ならば、 f は (a, b) で偏微分可能で、 $A = f_x(a, b)$, $B = f_y(a, b)$ でなければならない。

偏微分の順序交換定理

定理

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された2変数関数 f の2つの2次偏導関数 f_{xy} , f_{yx} が存在してともに連続であるとき, $f_{xy} = f_{yx}$ が成立する.

課題

- ▶ 講義資料や講義の誤りの指摘
- ▶ 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙で T2SCHOLA に
締切：6月27日 17:00 JST