2024 年 6 月 25 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 (LAS.M101-06) 講義資料 5

■お知らせ

- 今回は期限までに 85 名の方から課題の提出がありました．T2SCOLA からフィードバックを行っています．なお，用紙に記入されているコメントは山田用のメモです．読めない字があるかもしれませんが，この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください．
- ファイルフォーマットが pdf になっていない方がいらっしゃいました．見ていません．

■前回の補足

- 提出物に，前回言及した「イマイチ」があるものが 1 件ありました．
- 提出物に，前回言及した「気になります」が多数ありました．
- 以下の情報をいただきました．ありがとうございます：「いまいち」の語源は「今一つ」で，期待している（願っている）値や結果，状況に対し，少し不足していて物足りないさまを表す言葉．さらに，「今」は古語では福祉として “さらに．もう．” という意味を持っていた．「今一」は 1970 年代から普及したらしいです（ネット情報）
- 「偏微分の図形的な意味」を問う質問が多数ありました．図形的意味にこだわる理由は何でしょう？ とくに「微分は接線だが（意味が不明ですが）偏微分はなにか」という質問をされた方は，微分係数の「イメージ」が「接線の傾き」だけにとどまっているのではないかと心配になります．
- “なめらかな曲線” や “なめらかな曲面” に関する質問も複数．なめらかな曲線をどのように定義するべきでしょうか．
- 感覚的に理解したい，直感的に理解したい，というご希望が多数．数学的対象は複雑になると直感的な理解が難しくなります．まずは定義を押さえて，実例をあたる．そうしているうちにあなたの直感が拡がっていきます．いまある直感だけではだめ．
- 偏微分の順序交換定理や，連続性にかかわる「性質のよい」関数とはどんなものか，というご質問も多数．今回と次回で一応説明する予定．
- 偏微分の順序交換が成り立たない例はあるか，というご質問も複数ありました．問題 2-9.

■前回までの訂正

- 20240618 黒板 C の 4 ページ，2 行目：$x^2+y^2\in\mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}\in\mathbb{R}$
- 20240620 黒板 B の 5 ページ：偏動関数 ⇒ 偏導関数
- 20240620 黒板 C の 8 ページ：$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ に対して $f_x=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow f_x=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$
- 講義ノート 2 の問題 2-6 (2) の解答：原点を通り傾き m の直線 ⇒ 原点を通り傾き m の直線と傾き $-1/m$ の直線

■授業に関する御意見

- 休憩が適切であるというご指摘が複数ありました．
- 火曜の 1–2 時限の講義の A・B（スカラー積ではありません）は質問についての授業になるのでしょうか．
- 火曜の講義は毎回，大部分が質問についての話ですか？
  山田のコメント： 質問の量にもよりますがそういうサイクルを考えています．質問がでそうな内容はわざと詳説せずに火曜にまわすこともあります．最後の 1/3 は新しい話題にしています．
- 講義ノートの問題と教科書の問題はどちらを優先的にやるべきでしょうか．（時間的に両方やるのは厳しいので）
  山田のコメント： 演習の時間の問題は必ずやってください．その上で講義ノート，余裕があったらテキストでしょうか．テキストは授業い準拠していないので，問題を探すのが難しいかもしれません．
- ようやく大学数学らしい内容になってきて楽しいです． **山田のコメント** まだまだ
- 数学の教授に質問するのが大変恐縮ではありますが，このような機会はなかなかないので，質問するのを頑張りたいと思います．
  山田のコメント： ご活用ください．大抵の教員は学生さんからの質問が好物です．アクセスしてごらんなさい．
- 質問に答えていただいてありがたかったです． **山田のコメント** どういたしまして．
- 課題の採点基準や誤りを共有していただけるのが有り難い． **山田のコメント** はい．
- 質問や指摘に対してのコメントがきつい． **山田のコメント** 手加減しているつもり．例えばどんなところがきついですか？
- 冷房を少し涼しくすればよいと思います． **山田のコメント** 6 月 18 日講義資料，1 ページのご意見の 3 項目め．
- 少しだけスライドを切り替えるのが早い気がします．（黒板の資料を後で T2SCHOLA にあげてくれるのはありがたいですが）
  山田のコメント Sorry. あとであげるということにあまえているかも．
- もう少し字を大きく綺麗に書いてくださると助かります． **山田のコメント** 黒板ですか？ 了解です．

- 講義ノートが分かりやすくて助かってます． **山田のコメント** よかった．
- $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}=\frac{\pi}{4}$（原文ママ）を導出するプロセスがとても面白かったです．このプロセスを使えば自分でもマチンの公式のようなものを作れるのではと思いました． **山田のコメント** やってみよう．
- なぜ授業ごとに質問をすること義務なんですか．また質問が思いつかなかった場合はどうすればよいでしょうか．
  山田のコメント： 課題は質問だけでしたっけ．火曜日の講義では質問がどのようい扱われましたか？
- はじめての内容でムズカしかった． **山田のコメント** それはよかった．知っていることばかりだとつまらないものね．
- やっぱり授業が面白いです． **山田のコメント** はい．
- 結構すきです． **山田のコメント** me, too.
- とくになし **山田のコメント** me, too.

質問と回答

質問 1： 偏微分可能の定義を領域（かまたは開集合）にしぼっていたがそれはなぜでしょうか．どんな近いところでもその点自身以外の定義域が存在するような点（定義域の集積点）に対しても全微分や偏微分を定義して，領域や開集合でないと成り立たない定理はそのようい述べ，そうでなくても成り立つものは一般的に述べた方が便利だと思うのですが，これだと難点が生じるのでしょうか．

お答え： 集積点であったとしても連続的に極限がとれないこともありますね．また高次元になると境界の形も多様になるので統一的に扱いにくいです．開集合でない定義域をもつ関数の微分可能性の定義は前回少し言及した．

質問 2： 偏微分というものがあるならば, その逆の演算も存在しますか? もし存在するならば, どのような方法で計算するのでしょうか?

お答え： 偏導関数が与えられたときに元の関数を推測するということでしょうか．そういう関数は一般には存在しません．「ポアンカレの補題」で検索してみよう．

質問 3： 関数 $f\colon D(\subset\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ の値がすべての変数に依存するとは限らない場合であっても f は n 変数関数なのでしょうか．（例えば $f(x,y)=x$ とするとき，y は関数の値に影響を与えないが，このときも f は 2 変数関数であるのでしょうか）．また定義域が空集合の関数は存在するのでしょうか．

お答え： 前者も後者も，はい．

質問 4： 偏微分の順序交換定理によって f_{xy} と f_{yx} は一致するのに問題 2-9 は f_{xy} と f_{yx} が不一致なのですか？ $(x,y)=(0,0)$ のときの 2 階偏微分 $f_{xy}(x,y)=-1$，$f_{yx}(x,y)=1$ がよくわかりません．なぜそうなるのですか？

お答え： f_x，f_y は計算できますか？ その上で $f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}$ です．

質問 5： 講義ノート 2 の 14 ページで，2 変数関数に対して「関数 f が性質のよい関数ならば，そのグラフは座標空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面になる」とあるが，これは 3 変数関数などの n 変数関数 $n\geqq 3$ にも当てはまりますか．

お答え： 多少の変更のもと，はい．

質問 6： f_{xy} と f_{yx} はたいてい同じですが，例えば「f_{xy} を計算せよ」という問があれば f_{yx} の計算過程を書けば問題に従わないので減点ですか？

お答え： あまり品のない話はしたくないが，山田の試験では答えがあっていればよい．順序を気にしたいときは，そういう設問にする．

質問 7： 常微分方程式をとくのはいくつかの型をおぼえてそれぞれ対応すればいいですが（山田注：そんなに甘い物ではない）偏微分方程式は常微分方程式よりさらに多彩なものだと思っているので，ただ型を覚えるだけでは対応できないと思います．偏微分方程式をとくにあたってどのような姿勢で取り組むべきでしょうか．

お答え： 常微分方程式も偏微分方程式もいつでも解けるものではない．

質問 8： 値域と像の違いを詳しく教えて下さい．

お答え： 値域は始めに想定した，値の取りうる範囲．像は実際にとる値の範囲．

質問 9： 問題 2-1 の「グラフが存在する」ということの条件がいまいち（山田注：どれくらい？）よくわからないです．関数であってもグラフが描けないことはあるのですか．

お答え： グラフの定義から，グラフが存在しないことはない．

質問 10： 通常の微分であれば微分可能であれば関数が連続であるといえるが偏微分の場合 x, y に関して偏微分可能であったとしても三次元のグラフ（原文ママ：関数のグラフのことか？ 三次元のグラフとは言わない）を考えると連続であるとは限らないと思うのですが，そこのところがどのようなつながりになるのか教えてほしい．

お答え： 連続を議論するのにグラフを考える必要はあるか？

質問 11： 定数関数の導関数は 0 という認識が誤りであるという話がありましたが，その説明が理解できませんでした．

お答え： 1 点でない区間で定義された定数関数の導関数は 0．これは正しい．この話をしたのは「ある点で数値が与えられていたとしても，そこでの微分係数は 0 とは限らない」ということ．

質問 12：「多変数関数の変化の様子」で増減が Nonsense なのは大変で面倒くさいからですか？

お答え： いいえ，意味がないからです．

質問 13： グラフや等高面は必ず可視化できますか．

お答え： 可視化とは何ですか？

質問 14： 授業内で滑らかな関数（山田注：グラフがなめらかな曲線である関数ということか？）でも微分可能とは限らないという話がありました．$y = x^{1/3}$ を例にしていましたが、この関数が微分可能でないのは x を 0 に近づけるとグラフの傾きが発散することが原因だと思います．これ以外に微分可能にならない条件はあるのでしょうか? グラフの傾きが発散せず、滑らかな関数であれば微分可能と考えても良いのでしょうか。

お答え： 滑らかの定義は？

質問 15： 高校ではよくグラフがなめらかなら微分可能と言われます（山田注：よくない言い方ですね．「言う」の主語は？）が $f(x) = \sqrt[3]{x}$ はなめらかだけど（山田注：グラフがなめらかな曲線だが）微分不可能な点がある例でした．一般にグラフだけでその関数が微分可能かわからないのでしょうか．

お答え： グラフが滑らかの定義はなんでしょう．

質問 16： 連続でもなめらか（原文ママ：グラフがなめらか，の意味？）でも微分可能でもない例を今まで教わらなかったのでおどろきました．$f(x) = \sqrt[3]{x}$ の例では $x \to 0$ で $f'(x) \to \infty$ となったので高校のような言い方をすると傾き無限のときは微分可能でない（山田注：高校でそういう言い方をする？ 少なくとも教科書では言いそうもない．グラフの接線の傾きが無限大，くらいはありか）．でも逆関数 $g(x) = x^3$ なら $x = 0$ で $g'(x) \to 0$（山田注：$x \to 0$ で？）で微分可能です．グラフ的には x 軸と y 軸を入れ替えただけの同じ形なのに微分可能かどうかが変わるのはおかしいと思います．定義だからといわれれば確かにそのとおりなのですが $f'(x) \to 0$ も微分不可とするべきでは．もしくは $\to 0$ と $\to \infty$ は対称的な存在ではないということでしょうか．

お答え： もし微分が 0 の点は微分可能でない，などという定義を採用したら極値問題の記述が恐ろしく大変になりそうですね．ご質問の「おかしい」という部分は第一座標と第二座標の入れ替えで不変な性質を扱っているならそのとおり．しかし，1 変数関数 f のグラフ $\{(x, f(x)) \,|\, x \in I\}$（$I$ は f の定義域）において，第一座標と第二座標の役割は対称でないのでとくにおかしいとはいえないのです．

質問 17： 山田先生は境界を含むのは端があるからいやだ的なことをおっしゃっていましたが，境界を含むのは領域と言わないということでしょうか．

お答え： はい，通常は境界を含まないことを領域の定義に含めます．

質問 18： 講義では，領域は境界を含まずひとつづきであるものと述べられていますが，入試では「〜の領域を求めよ」という問題の答えが境界を含んだりひとつづきでないものもあることがあります．これは入試において「領域」という言葉が間違った使い方をされているということえすか？ それとも入試における領域は別の意味を持っているということですか？

お答え：「領域」という語の通常の定義は連結開集合．高等学校では少し違った意味で使っている（というか定義されていない）．

質問 19： 2つに分割されているのが領域ではないというのがなぜなのかがよく分からなかった．

お答え： 定義．

質問 20： 領域では各店で好きな方向に少しは動け，境界を含まないというのは，境界付近では lim のような考えでどこまでも境界に近づけるということでしょうか．

お答え： それは領域というよりむしろ境界の性質．

質問 21： 講義中の “f のグラフは 3 次元平面とは少し違う” と説明していましたが，本物の 3 次元平面とはどのようなものですか．また 3 次元空間で表すことはできますか．

お答え：「3 次元平面」という語はありません．

質問 22： 2 変数関数 $f(x, y)$ をグラフで表すと 3 次元の形をとります．3 変数以上の関数はどうやって可視化しますか？

お答え： 2 変数関数のグラフは 3 次元空間の中の図形となりますが「3 次元の形」ではありません．多変数関数の場合，可視化する必要はありますか？

質問 23： $z = x^2 + y^2$ という関数は x と y を変数とみなせば $z = x^2 + y^2$ は 2 変数関数ですが，z と x を変数とみなせば x と z の値が定まっても y の値が 1 つに定まらないときがあります．そういう場合も 2 変数関数とよべま

すか？

お答え： 「関数」って何でしたっけ．定義に立ち戻ってごらんなさい．この講義で紹介した 2 変数関数の表示に z という変数は入っていましたか？

質問 24： ある関数を微分した式（原文ママ：導関数のことか？）にある値を代入すると，元の関数のある点での傾きを求めることができますが，偏微分した式は元の関数のどこの傾きに関係があるのか．とくに 4 次元以上の場合はどうであるか.

お答え： 「関数の傾き」って何ですか？

質問 25： 自然数の定義など授業の中で複数の定義や流派があるという話があったが，数学的な議論をする際に混乱が生じることはないのですか．また，授業の中で採用している定義はどういう基準でその定義の仕方を選んでいるのですか.

お答え： 前半：なので，危なそうなときにはどの定義を採用するか明言する．後半：自分からみて（その文脈で）多数派.

質問 26： n 変数関数 $f(x_1,\dots,x_n)$ について，グラフ g は $g(x_1,\dots,x_n,f(x_1,\dots,x_n))\subset\mathbb{R}^{n+1}$ となって $n+1$ 個の変数があるように見えるのですが，g の x_1,..., x_n への依存のしかたが，x_1,...,x_n と $f(x_1,\dots,x_n)$ とで違うだけで f は x_1, ..., x_n の関数であるが g は x_1,...,x_n の n 個の変数をもつということでしょうか?

お答え： グラフをこんな書き方するんですか？

質問 27： 黒板 6/11 ページ目で “f のグラフ $:=\{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in D\}\in\mathbb{R}^3$”（原文ママ：$\subset\mathbb{R}^3$ の誤り）とあるのですが，$f(x,y)$ が x と y の 2 変数によって値をとるならば x と y のみで 2 変数関数にならず 3 変数関数になるのはなぜですか.

お答え： 3 変数関数にはなっていません．3 変数関数とは 3 つの変数 (x,y,z) を与えたときにそれに応じて一つの数が決まる，という対応の規則のこと．あなたが主張している「三変数関数」はそうなっていますか？

質問 28： 偏微分可能な関数が連続でない場合があるのはなぜですか．偏微分は高等学校で履修した全微分（原文ママ）を拡大した内容だと思っていたので不思議でした．偏微分する関数が一変数関数のとき，全微分と同義という認識（原文ママ，先週コメントしたよね）で合っていますか．f_{xy} と f_{yx} が同じにならない関数にはどのようなものがありますか．またそのような関数には規則性がありますか.

お答え： 高等学校で全微分を（この言葉のままに）習いましたか？ 認識はあなたの個人的なことだと思います．問題 2-9．どういうものを「規則性がある」と考えますか？

質問 29： 偏微分の記号として d でなくわざわざ ∂ を使う理由を知りたいです．$f(x,y)=x^2+y^2$ としたとき $\frac{df}{dx}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ はどちらも $2x$ になるからです.

お答え： 前者は定義されません.

質問 30： なぜ積分と偏積分（原文ママ：微分と偏微分）では記号が違うか．$\frac{d^2f}{dx\,dy}$ のまま書いても誤解がないと思う．一つの記号に統一した方が便利じゃないか.

お答え： Chain rule などが理由だと思う．来週説明する.

質問 31： なぜ偏微分記号は d ではなく α のような記号なのですか？ また，高階偏導関数で順序交換に例外がありますか？

お答え： 前半：字が違う．スクリーンに写した大きな字を見ましたか？ 後半：問 2-9.

質問 32： 「$f\colon\mathbb{R}^2\ni(x,y)\mapsto f(x,y)\in\mathbb{R}$」を「$f\colon(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto f(x,y)\in\mathbb{R}$」と書いてもいいですか．$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ の方が個人的には見やすいし書きやすいです.

お答え： どちらでも結構です．山田が前者を使うのは $\mapsto$ の前後に変数を書きたいから.

質問 33： 映写資料 A（6 月 20 日分）の 6 ページの下側にある「$\{(x,y)|f(x,y)=c\}\subset D\subset\mathbb{R}^2$」という部分の意味がわかりません．「$\subset$」の数が多くて式が長いので混乱してしまっています.

お答え： 日本語で書き下してごらん.

質問 34： $f_x(a,b)$ を f_x と省略して書いても良いのか？

お答え： (a,b) を明示する必要がある場面だとだめですね.

質問 35： $y=\operatorname{Cos}^{-1}x$ は $0\leqq y\leqq\pi$ で定義されていますが，$\pi\leqq y\leqq 2\pi$ d 定義するとなにか影響はありますか.

お答え： ないです．もちろん公式は少しだけ変わります．それから，多数派と違う定義なので，論文などに書く時に逐一注意する必要があります.

質問 36： 微分における $\frac{dy}{dx}$ という分数表記において，講義で分子と分母の積極的な意味付けを控えたのはなぜですか？

お答え： 微分形式，というのは流石に少し先走りすぎなので.

質問 37： 授業中に「$\frac{dy}{dx}$ は分数であると言いたくないが分数のように計算していい」とおっしゃっていましたが，下の 2

式の右辺をどのように解釈すればいいのか教えて下さい：$f_{xy}=(f_x)_y=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$（以下略）

お答え： 最初の言明は dy/dx について．偏微分記号については何も言っていない．ご質問の式は，$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$ の定義式とみなす．

質問 38： 集合は内包的記法で $\{$要素$|$条件$\}$ と書きますが，18 日の講義の途中で等置集合（原文ママ；等値集合）を表すのに $\{(x,y)\in D\,|\,f(x,y)=c\}$ という書き方をされていて，縦線の左にも条件が書かれているように見えました．これは $\{(x,y)\,|\,(x,y)\in D, f(x,y)=c\}$ の省略した書き方ですか？

お答え： はい．

質問 39： 偏微分の順序交換定理が成り立つとき，$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$ ではなく $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}$ のように微分する順番を明らかにするべき場合はありますか．

お答え： 文脈による．たとえば一方の計算が他方にくらべて格段に困難だった場合など．

質問 40： 授業中 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ の表記はあまり使わないというお話があったが，これは単に好みの問題なのか，なにか具体的な理由があるのかが気になりました．ご回答いただけると幸いです．

お答え： ここでは余り使わないようにしてきちんと「条件」を書くようにしたい．

質問 41： $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ の「$\setminus$」は集合の引き算という意味ですか．

お答え： はい．

質問 42： $\mathbb{R}$ につく数字（$\mathbb{R}^1$, R^2, $\mathbb{R}^3$ などの自然数）は変数の個数を指していますか．

お答え： 線形代数で扱ったのと同じ記号です．

質問 43： よりまるまるとした d の形をしているから ∂ をラウンドディーとよぶのでしょうか．

お答え： 多分．

質問 44： $f(x,y)$ を x について偏微分をした $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ は f_x と表記してもよいのですか．

お答え： はい

質問 45： 一変数関数の微分で接線の傾き（原文ママ：グラフの接線の傾き？）という意味づけができたように，二変数の微分を考えるときに接する面について考えるとはならないのですか？

お答え： 考えてもよいがそのためにはもう少し準備がいる．

質問 46： 偏微分ではある一つの係数数以外を定数とみなして微分しましたが，複数の変数を選択し，それら以外を定数とみなして微分する操作は存在しますか．

お答え： 動かす変数以外を定数として定義域を縮小して全微分でしょうか．

質問 47： 一変数関数のときには通用したのに多変数関数では通用しなかった「ある関数あある点で微分可能ならばその関数はその点で連続」のように一変数関数で通用した平均値の定理は多変数関数では通用するのか．

お答え： 平均値の定理のステートメントをどう多変数化しますか？

質問 48： グラフと等高線はどのような問題の時につかうものなのか．

お答え： 地図や地形や天気図じゃだめですか？

質問 49： 地図などで実際に使われる等高線は数学的にいろいろ計算しているんですか？

お答え： 測量しているんじゃないですか？

質問 50： 等高線を表す例として，逆つりがね型の図を用いて説明していたが，山の形に似たつりがね型の等高線を表すにはどうすれば良いのか．

お答え： たとえば各等高線の高さにマイナスをつける．

質問 51： 6/18 の講義でグラフについて定義していたが，3 次元以上のグラフを図示することはできないので，なにか 3 変数関数以上の次数（原文ママ）の関数のグラフの使いみちや使われている分野はあるのか．

お答え： この文脈で，次数という語は使いません．理工学のあらゆる分野で使われます．

質問 52： 円は 2 次曲線のグラフではないというお話は，グラフは $f\colon x\to f(x)$ の f についての点 $(x,f(x))$ を示したもので，円は $f_2\colon(x,y)\to f(x,y)=x^2+y^2$ について $f_2(x,y)=r^2$ を満たす (x,y) を図示したもので，f_2 の値 r^2 の等高面（表現は合っていますか？ 山田注：この場合は等高線といった方が適切では？）以外に $f(x,y)=r^2$ の解 (x,y) の図示と言えますか？ つまり「2 次関数（原文ママ：2 変数関数のことか？）の値を定数 r^2 に定めたときの解の図示」と言えますか？ 図示という表現がっ正しいかも含め．

お答え： 図示というより「集めた」というべきでしょう．グラフは集合 $\{(x,f(x))\}$，等高線は集合 $\{(x,y)\,|\,f(x,y)=c\}$ なので．これを絵に描くかとは関係ない．さて，円はたとえば $\log(x^2+y^2)=c$ という等高線とも思えますね．

質問 53： $m\frac{d^2x}{dt^2}+\rho\frac{dx}{dt}+kx=0$ などが資料で微分方程式の例として挙げられていたと思いますが，n 次の微分方程式

（山田注；n 階の微分方程式のこと？）を一般的に解く方法はあるのでしょうか．それとも高次方程式のように，公式は存在しないのでしょうか．

お答え： 微分方程式はたいてい「解けない」（「解ける」の意味をきちんと定義する必要があるが）．

質問 54： 偏微分方程式がラプラスの方程式，ポアソンの方程式，熱方程式などに使われているがこれは変数の数がな何個まで方程式として気になる．

お答え： 気になりますか．そうですか．「変数」は何を想定していますか？

質問 55： 方程式ではその方程式の次数の数だけ解が存在している．常微分方程式の解は任意の定数を含むので無限個の解をもつので，その方程式の次数は無限であるのか．

お答え： なぜ次数を考えなければならないか？

質問 56： 黒板資料 B（山田注：該当の講義が 2 回あったがどちらか）のスライドで 2 変数関数を $D \subset R^2$（山田注：原文ママ．$\mathbb{R}^2$ のことか）とした後に $f\colon D \to \mathbb{R}$ として定義しているが，なぜ D かわかりません．$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と定義してなにか良くない点がありますか？

お答え： どんな 2 変数関数も $\mathbb{R}^2$ 全体で定義されているわけではない．たとえば $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ は $(0,0)$ で定義されていない．

質問 57： 今回多変数関数について学ばせて頂きましたが，この概念と複数平面（原文ママ：複素平面）を結びついて二次関数の x の定義域を複素数まで拡張させるのもできますか? 例えば，$z = p + qi$ とおき、$f(x) = ax2 + bx + c$ として $y = |f(z)|$ とすると，$y = f(p,q)$ の二変数関数として扱かうのです。

お答え： 普通にやります．

質問 58： 講義ノートに時々出てくる ♢ マークはどういう意味を表していますか．

お答え： あるブロックの終わり．

質問 59： sine gordon equation を初めて聞きました．これについて書いてある先生のオススメの本を教えてほしいです．

お答え： C. Rogers & W. K. Schief, Bäcklund and Darboux transformations (Cambridge)．日本語だと，少々入手しにくいが井ノ口順一先生の埼玉大学の講義をまとめたレクチャーノート．

質問 60： 正規分布の密度関数ってなんですか．

お答え： 高等学校の教科書の正規分布表の上に小さくかかれた積分の式の中身．

質問 61： 熱方程式の一般解は何ですか？

お答え： 何をもって一般解というか，ですが，基本解と初期条件の convolution．

質問 62： n 次元空間，とくに 4 次元空間において，4 次元を表すキューブのような絵がネット上には存在したりしていますが，なぜ 4 次元を我々は視覚的に捉えられているのえしょうか．

お答え： ある種の規約をおいて，3 次元または 2 次元に落としている．なので，見るときはどういう約束で描かれているのかを知っている必要がある．

質問 63： 6/18 の黒板 8 ページにある原文ママって何のことを行っているのですか．原文のそのままを資料に乗せているということでしょうか．

お答え： そうです．そこでは「定義」という言葉の使い方が間違っていましたが，それは原文そのまま転写したので，気をつけてよんでね，という注釈．

質問 64： 入試問題では多変数関数の最大値，最小値を求める問題が散見されますが，それは大学で習う偏微分についてなにか関連があるようにして作られていたりしますか？

お答え： どうでしょう．一般論としてわかりません．

質問 65： 6/20 の 8 ページ目のような綺麗なグラフ？ 3 D？ の図を書きたいが，mathematica で書いてもあまり綺麗にかけない．今後レポートなどの提出ようにどのようにして書いたか教えていただきたい．

お答え： Mathematica で描いています．20 年くらいまえから本の図版をつくるために工夫を重ねていますが ad hoc な技が多いので，お伝えしづらいです．

質問 66： なぜ偏微分という微分法を定義するのですか．偏微分は実際どのような場面で使われていますか？

お答え： 物理学や化学で使いませんか？

質問 67： 偏微分を導入することでどのような効果が得られますか．

お答え： 何に対してですか？

質問 68： 偏微分方程式がラプラスの方程式，ポアソンの方程式，熱方程式などに使われているがこれは変数の数がな何個まで方程式として気になる．

お答え： 気になりますか．そうですか．「変数」は何を想定していますか？

質問 69： 偏微分の順序交換定理は物理現象を表す式には成立していますか.

お答え： どんな物理現象を想定していますか？

質問 70： 偏微分は 1Q の力学でポテンシャルと力の関係について学習した際に触れていましたが，力学の授業でも今後偏微分を活用する機会がさらに出てくるのでしょうか.

お答え： 物理学では息をするように偏微分する.

質問 71： 好きな映画はなんですか？

お答え： Les parapluies de Cherbourg.