微分積分学第一 (LAS.M101-06)

連続性と微分可能性

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/27

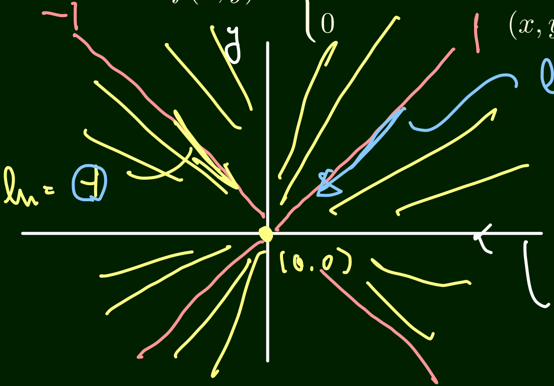
多変数関数の極限値

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$$

(x, y) が どんな近づき方で (a, b) に近づいても f(x, y) は近づき方によらず A に近づく

例：

- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$



lim f(x.y) = 1

x

$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ は存在しない}}$

lim = 0

多変数関数の連続性

$D \subset \mathbb{R}^2$：領域；$f\colon D \to \mathbb{R}$；$(a,b) \in D$

定義

f が (a,b) で連続 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

は $(0,0)$ で連続でない

$$\underbrace{\lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{\substack{x\to 0 \\ (y\neq 0)}} f(x,y)\Bigr)}_{\text{とくべつな近づけ方}} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

これは f の極限値ではない

多変数関数の微分可能性

$D \subset \mathbb{R}^2$：領域；$f\colon \ \to \mathbb{R}$：関数；$(a, b) \in D$

定義

全

f が (a, b) で**微分可能**であるとは，定数 A, B をうまくとり，十分小さい $(h, k) \neq (0, 0)$ に対して

誤差

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2+k^2} \qquad (*)$$

により $\varepsilon(h, k)$ を定義すると，次が成り立つことである：

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0.}$$

微分可能 ⇒ 連続　$\not\Leftarrow$　$f(x,y) = \sqrt[3]{x}$

命題

関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で連続.

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \underbrace{\varepsilon(h,k)}_{\downarrow\, 0}\underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$\downarrow (h,k) \to (0,0)$

$$\left\{ \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k) \right\} - f(a,b) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \qquad \square$$

微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能 $\not\Leftarrow$

命題

関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で偏微分可能で，$(*)$ の $A = f_x(a,b)$, $B = f_y(a,b)$.

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$k=0$

$|0| \to 0$

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = \frac{Ah + \varepsilon(h,0)|h|}{h}$$

$$= A + \varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} A$$

$h \to 0$ で $\varepsilon(h,0) \to 0$, $\frac{|h|}{h}$ は ± 1

左辺の極限は $f_x(a,b)$.

f が (a, b) で微分可能

$\Leftrightarrow$ ・ f が (a, b) で偏微分可能

・ $$\frac{\left(f(a+h,\, b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k \right)}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$$

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\underline{Ah+Bk}+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

偏微分可能＋偏導関数が連続 ⇒ ~~連続~~ 微分可能

㊟

定理 (定理 3.16)

領域 D で定義された 2 変数関数 f が D の各点で偏微分可能，かつ偏導関数 f_x, f_y が D で連続ならば f は D の各点で微分可能である．

定理 3.16 の証明

$D \subset \mathbb{R}^2$：領域；$f\colon D \to \mathbb{R}$.

定理

f が D の各点で偏微分可能；f_x, f_y が D で連続

$\Rightarrow f$ は D で~~連続~~.

微分可能

証明：

$$F := f(a+h, b+k) - f(a, b+k), \quad G := f(a, b+k) - f(a, b).$$

定理 (平均値の定理)

関数 f が区間 I で微分可能であるとき，点 $a \in I$ と $a+h \in I$ となるような h に対して，次をみたす θ が存在する：

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h \qquad (0 < \theta < 1).$$