微分積分学第一 (LAS.M101-06)

連続性と微分可能性

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/27

多変数関数の極限値

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$$

例：

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

多変数関数の連続性

$D \subset \mathbb{R}^2$：領域；$f\colon D \to \mathbb{R}$；$(a,b) \in D$

定義

f が (a,b) で連続 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$

多変数関数の微分可能性

$D \subset \mathbb{R}^2$：領域；$f\colon \ \to \mathbb{R}$：関数；$(a, b) \in D$

定義

f が (a, b) で**微分可能**であるとは，定数 A, B をうまくとり，十分小さい $(h, k) \neq (0, 0)$ に対して

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \qquad (*)$$

により $\varepsilon(h, k)$ を定義すると，次が成り立つことである：

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0.$$

微分可能 $\Rightarrow$ 連続

命題

関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で連続．

微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能

命題

関数 $f(x, y)$ が (a, b) で微分可能ならば，f は (a, b) で偏微分可能で，$(*)$ の $A = f_x(a, b)$, $B = f_y(a, b)$.

偏微分可能＋偏導関数が連続 $\Rightarrow$ 連続

定理 (定理 3.16)

領域 D で定義された 2 変数関数 f が D の各点で偏微分可能，かつ偏導関数 f_x, f_y が D で連続ならば f は D の各点で微分可能である．

定理 3.16 の証明

$D \subset \mathbb{R}^2$：領域；$f\colon D \to \mathbb{R}$.

定理

f が D の各点で偏微分可能；f_x，f_y が D で連続
$\Rightarrow f$ は D で連続.

証明：

$$F := f(a+h, b+k) - f(a, b+k), \quad G := f(a, b+k) - f(a, b).$$

定理 (平均値の定理)

関数 f が区間 I で微分可能であるとき，点 $a \in I$ と $a+h \in I$ となるような h に対して，次をみたす θ が存在する：

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h \qquad (0 < \theta < 1).$$