微分積分学第一 (LAS.M101-06)

連続性と微分可能性

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/27

偏微分の順序交換定理

定理 (定理 3.18)

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f の 2 つの 2 次偏導関数 f_{xy}, f_{yx} が存在してともに連続であるとき, $f_{xy} = f_{yx}$ が成立する.

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial x \partial y}$$

よく扱う例では自動的に成立する.

C^k-級

定義

- f が D で $\boxed{C^0\text{-級}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f が D で連続
- f が D で $\boxed{C^1\text{-級}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f が D で偏微分可能で，すべての偏導関数が D で連続. C^1
  ⇒ f が微分可能 ⇒ f は連続 ⇒ C^0
- f が D で $\boxed{C^2\text{-級}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ D 上で f の 2 次偏導関数がすべて存在して，それらが D で連続.
  (すべての)
- f が D で $\boxed{C^k\text{-級}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ D 上で f の k 次偏導関数がすべて存在して，それらが D で連続.
  ( )
- f が D で $\boxed{C^\infty\text{-級}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ すべての非負整数 k に対して C^k-級.

- f が C^1-級なら f は微分可能.
- f が C^1-級なら f は C^0-級.
- f が C^2-級なら $f_{xy} = f_{yx}$

全微分

$P=(a,b)$

$$(df)_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) \qquad \cancel{df}\ df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

で与えられる 2 次行ベクトルを f の（P における）全微分または微分という．

differential

全微分

$$\underline{df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.}$$

$$\varphi(x,y) = x \qquad \varphi_x = 1 \qquad \varphi_y = 0$$

$$dx = d\varphi = (1,\ 0)$$ という記号を用いる.

$$dy = (0,1)$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \ \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,\ 0) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(0,1)$$

$$= \underline{\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy}$$

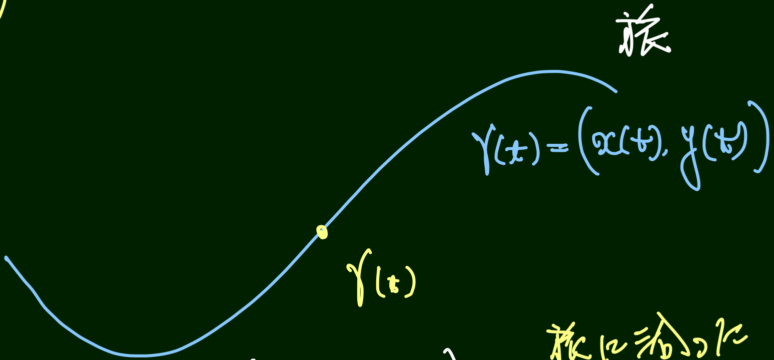
曲線に沿う微分（次回のための準備） 合成関数の微分

- $f\colon D\to\mathbb{R}$：微分可能な 2 変数関数
- $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$：$D$ の曲線のパラメータ表示
- $F(t):=f\circ\gamma(t)=f\bigl(x(t),y(t)\bigr)$

命題 (命題 3.23)

$$\frac{dF}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t).$$

D)



旅に沿った
fの値の変化

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\cancel{\partial x}} \frac{\cancel{dx}}{dt} + \frac{\partial f}{\cancel{\partial y}} \frac{\cancel{dy}}{dt}$$

$$\cancel{dF} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

こういう約分をしちゃだめ!
∂という特別な記号をつかう理由

課題

- 講義資料や講義の誤りの指摘
- 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙でT2SCHOLAに

締切：6月27日 17:00 JST