微分積分学第一 (LAS.M101-06)

連続性と微分可能性

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/06/27

偏微分の順序交換定理

定理 (定理 3.18)

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f の 2 つの 2 次偏導関数 f_{xy}, f_{yx} が存在してともに連続であるとき, $f_{xy} = f_{yx}$ が成立する.

C^k-級

定義

- f が D で C^0-級 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f が D で連続
- f が D で C^1-級 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f が D で偏微分可能で，すべての偏導関数が D で連続.
- f が D で C^2-級 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ D 上で f の 2 次偏導関数がすべて存在して，それらが D で連続.
- f が D で C^k-級 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ D 上で f の k 次偏導関数がすべて存在して，それらが D で連続.
- f が D で C^∞-級 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ すべての非負整数 k に対して C^k-級.

- f が C^1-級なら f は微分可能.
- f が C^1-級なら f は C^0-級.
- f が C^2-級なら $f_{xy} = f_{yx}$

全微分

$$(df)_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) df \quad = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

で与えられる 2 次行ベクトルを f の（P における）<u>全微分</u>または<u>微分</u>という.

全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

曲線に沿う微分（次回のための準備）

- $f\colon D \to \mathbb{R}$：微分可能な 2 変数関数
- $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$：$D$ の曲線のパラメータ表示
- $F(t) := f \circ \gamma(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$

命題 (命題 3.23)

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\frac{dy}{dt}(t).$$

課題

- 講義資料や講義の誤りの指摘
- 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙で T2SCHOLA に
締切：6 月 27 日 17:00 JST