微分積分学第一 (LAS.M101-06)

チェイン・ルール

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/02

Q and A

Q: $f : I \to \mathbb{R}$；区間 I 上で $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ は区間 I で定数" という定理を平均値の定理で示していたが，次のような証明でもよいですか．$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 0\,dx = C$（$C$ は積分定数）より示された．

A: よくありません．

・F が f の原始関数 $\Longleftrightarrow$ $F' = f$

・F, G が f の原始関数 $\Longrightarrow$ $G = F + \text{定数}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad F(x) = \begin{cases} \log x + 3 & (x>0) \\ \log|x| + 2 & (x<0) \end{cases}$$

Q and A

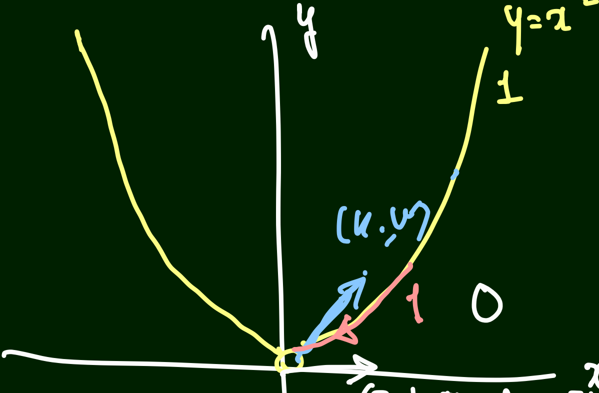
Q: 多変数関数の極限について，講義ノートの (3.1) にある「(x, y) がどのような経路で (a, b) に近づいても」の部分は，例えば 1 変数関数における極限が変数を正の方向，及び負の報告からある値に近づけることで定義されるように，「平面上のあらゆる方向から (x, y) を (a, b) に近づけても」と言い換えられますか？

A: いいえ

$$(a+tu,\ b+tv) = (a, b) + t(u, v) \quad (t: 変数) \quad (t \to 0)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & y = x^2,\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

fの定義域



・十分小さいtに対して

$$f(0+tu,\ 0+tv) = 0$$

・あらゆる方向から0に近づくと

$$f \to 0$$

・$y=x^2$にそって$(0,0)$に近づくと

$$f \to 1$$

Q and A

Q: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$ $(*)$ が成り立つための必要十分条件は

- 任意の 2 つの数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ に対して
  $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a+h_n, b+k_n) = A$ であると講義でありましたが h, k を数列にする理由は何ですか.

A: 任意の0 に収束する 2 つの数列，です.

εδ を結構さけることができる

Q and A

Q: 授業で $\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ を誤差であると説明されていましたが，これが誤差と言えるのはなぜですか.

$D \subset \mathbb{R}^2$：領域；$f\colon \to \mathbb{R}$：関数；$(a,b) \in D$

定義

f が (a,b) で**微分可能**であるとは，定数 A, B をうまくとり，十分小さい $(h,k) \neq (0,0)$ に対して

(h,k)→(0,0)のとき
前の2項より速く

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \qquad (*)$$

0に近づく

により $\varepsilon(h,k)$ を定義すると，次が成り立つことである：

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0.$$

1 Ah
2 Bk) 優勢 dominant.

3 $\varepsilon(h,k)$ $\sqrt{h^2+k^2}$

$$\sqrt{\frac{①^2}{A^2}+\frac{②^3}{B^2}}$$

1より0に近く

L h 小 h^2 小

$\rightarrow 0$

$(h,k)\rightarrow(0,0)$

①, ② $\rightarrow 0$

なら

比 $\rightarrow 0$

高等学校の復習：合成関数の微分法

$y = f(x);\ x = g(t)$

$F(t) := f(g(t)) = f \circ g(t)$ (合成)

$(\sin t^2)' = \cos t^2 \cdot 2t$

- $F'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$ 積

証明？

- $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$

分数のように思うことができる

$\left(\dfrac{19}{95} = \dfrac{1}{5},\quad \dfrac{16}{64} = \dfrac{1}{4},\quad \dfrac{\sin x}{x} = 6 \right)$

曲線に沿う微分

- $f\colon D \to \mathbb{R}$: 微分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$
- $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$: D の曲線のパラメータ表示
- $F(t) := f \circ \gamma(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$

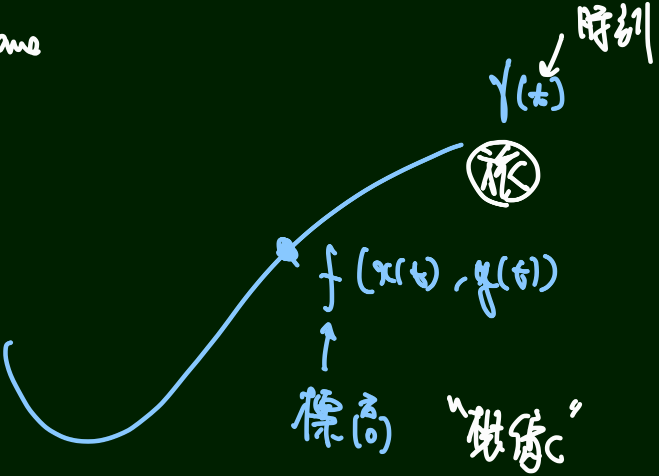
命題 (命題 3.23)

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}(t).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

分数のように扱えない

xy- plane

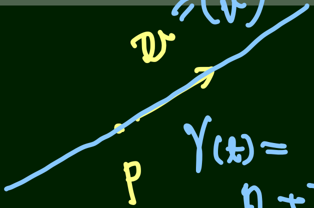


方向微分

- $f\colon D \to \mathbb{R}$：微分可能な 2 変数関数
- $P = {}^t(a, b) \in D$；$\boldsymbol{v} = {}^t(u, v)$

f の P における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分：

$$(df)_P\boldsymbol{v} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(P + t\boldsymbol{v})$$



$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

P

$\gamma(t) = p + t\boldsymbol{v}$

$\frac{\partial x}{\partial t} = u$

$\frac{\partial y}{\partial t} = v$

命題 (命題 4.2)

$$(df)_P\boldsymbol{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)u + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)v$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

勾配ベクトル

次回

- $f\colon D \to \mathbb{R}$：微分可能な 2 変数関数
- $P = {}^t(a,b) \in D$; $\boldsymbol{v} = {}^t(u,v)$

$$(\operatorname{grad} f)_P := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(P) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P) \end{pmatrix}$$

- $(df)_P\boldsymbol{v} = \langle (\operatorname{grad} f)_P, \boldsymbol{v} \rangle$