微分積分学第一 (LAS.M101-06)

チェイン・ルール

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/02

Q and A

Q: $f\colon I \to \mathbb{R}$；区間 I 上で $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ は区間 I で定数" という定理を平均値の定理で示していたが，次のような証明でもよいですか．$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 0\,dx = C$（$C$ は積分定数）より示された．

A: よくありません．

Q and A

Q: 多変数関数の極限について，講義ノートの (3.1) にある「(x, y) がどのような経路で (a, b) に近づいても」の部分は，例えば 1 変数関数における極限が変数を正の方向，及び負の報告からある値に近づけることで定義されるように，「平面上のあらゆる方向から (x, y) を (a, b) に近づけても」と言い換えられますか？

A: いいえ

Q and A

Q: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$ (*) が成り立つための必要十分条件は任意の 2 つの数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a+h_n, b+k_n) = A$ であると講義でありましたが h, k を数列にする理由は何ですか.

A: 任意の<u>0 に収束する</u> 2 つの数列，です.

Q and A

Q: 授業で $\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ を誤差であると説明されていましたが，これが誤差と言えるのはなぜですか.

$D \subset \mathbb{R}^2$：領域；$f\colon \to \mathbb{R}$：関数；$(a,b) \in D$

定義

f が (a,b) で**微分可能**であるとは，定数 A, B をうまくとり，十分小さい $(h,k) \neq (0,0)$ に対して

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \qquad (*)$$

により $\varepsilon(h,k)$ を定義すると，次が成り立つことである：

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0.$$

高等学校の復習：合成関数の微分法

$$y = f(x);\, x = g(t)$$

曲線に沿う微分

- $f\colon D \to \mathbb{R}$：微分可能な 2 変数関数
- $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$：$D$ の曲線のパラメータ表示
- $F(t) := f \circ \gamma(t) = f\bigl(x(t), y(t)\bigr)$

命題 (命題 3.23)

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t).$$

方向微分

- $f\colon D \to \mathbb{R}$：微分可能な 2 変数関数
- $P = {}^t(a, b) \in D$；$\boldsymbol{v} = {}^t(u, v)$

f の P における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分：

$$(df)_P\boldsymbol{v} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(p + t\boldsymbol{v})$$

命題 (命題 4.2)

$$\begin{aligned}(df)_P\boldsymbol{v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)u + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)v \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\end{aligned}$$

勾配ベクトル

- $f\colon D \to \mathbb{R}$：微分可能な 2 変数関数
- $P = {}^t(a, b) \in D$；$\boldsymbol{v} = {}^t(u, v)$

$$(\operatorname{grad} f)_P := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(P) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P) \end{pmatrix}$$

- $(df)_P \boldsymbol{v} = \langle (\operatorname{grad} f)_P, \boldsymbol{v} \rangle$