微分積分学第一 (LAS.M101-06)

チェイン・ルール

Chain Rule

鎖

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/02

曲線に沿う微分

- $f\colon D \to \mathbb{R}$：微分可能な 2 変数関数
- $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$：$D$ の曲線のパラメータ表示
- $F(t) := f \circ \gamma(t) = f\bigl(x(t), y(t)\bigr)$

命題 (命題 3.23)

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t).$$

Chain rule

$$\left(\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\right)$$

チェイン・ルール

ξ xi

η eta

- $f(x,y)$：微分可能な 2 変数関数
- $x = x(\xi,\eta),\ y = y(\xi,\eta)$：微分可能
- $\tilde{f}(\xi,\eta) := f\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)$

$\Rightarrow \tilde{f}$ は微分可能で

ηを定数と思う

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)\frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi,\eta)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi,\eta) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta).$$

チェイン・ルール

- $f(x, y)$：微分可能な 2 変数関数
- $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$：微分可能
- $z = f(\xi, \eta) := f\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)$

$\tilde{f}$ とかきわすれました.

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

チェイン・ルール

- $z = f(x, y)$：微分可能な 2 変数関数
- $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$：微分可能
- $z = f(\xi, \eta) := f\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

- $f(x,y)$：微分可能な 2 変数関数
- $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$：微分可能
- $f(\xi,\eta) := f\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{f(x,y)\text{の性質}} \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix}$$

df

変数変換 $(\xi,\eta) \mapsto (x,y)$ の性質

変数変換のヤコビアン

Jacobi行列

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

例

$x = a\xi + b\eta$

$$F \colon \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \longmapsto F(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A\xi$$

$x_\xi = \dfrac{\partial x}{\partial \xi} = a \qquad x_\eta = b$

$y_\xi = c \qquad y_\eta = d$

Jacobi行列 $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

例

A：2 次の正則行列

$$F\colon \mathbb{R}^2 \ni \xi \longmapsto A\xi \in \mathbb{R}^2$$
$$F^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A^{-1}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$$

F^{-1} の Jacobi 行列 は

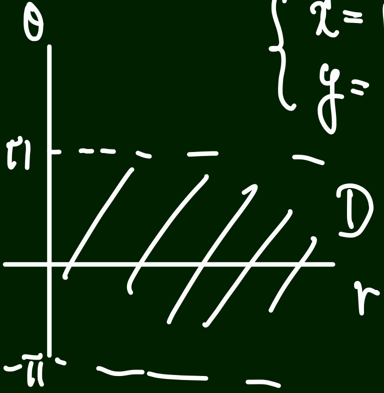
$(F$ の Jacobi 行列$)^{-1}$ ← 逆行列

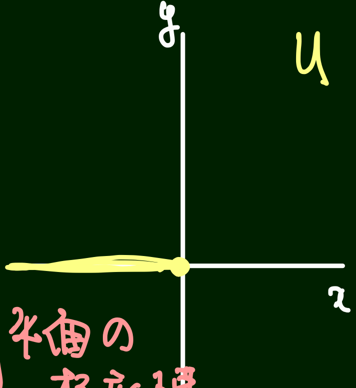
例 $D = \{(r,\theta);\ r>0,\ -\pi<\theta<\pi\}$

$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0);\ x \leq 0\}$

$$F : D \ni \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto F(r,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \in U$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$





xy平面の極座標

$$\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & r_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \star$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = ? \qquad \star^{-1}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \neq \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial r}}$$

課題

- 講義資料や講義の誤りの指摘
- 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙で T2SCHOLA に

締切：7 月 4 日 17:00 JST

7月6日

中間試験 予告