微分積分学第一 (LAS.M101-06)

チェイン・ルール

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/02

曲線に沿う微分

- $f \colon D \to \mathbb{R}$：微分可能な 2 変数関数
- $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$：$D$ の曲線のパラメータ表示
- $F(t) := f \circ \gamma(t) = f\bigl(x(t), y(t)\bigr)$

命題 (命題 3.23)

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t).$$

チェイン・ルール

- $f(x, y)$：微分可能な 2 変数関数
- $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$：微分可能
- $\tilde{f}(\xi, \eta) := f\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ は微分可能で

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}(\xi, \eta) &= \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi, \eta) \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}(\xi, \eta) &= \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, \eta).
\end{aligned}
$$

チェイン・ルール

- $f(x,y)$：微分可能な 2 変数関数
- $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$：微分可能
- $z = f(\xi,\eta) := f\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

チェイン・ルール

- $z = f(x, y)$：微分可能な 2 変数関数
- $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$：微分可能
- $z = f(\xi, \eta) := f\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

チェイン・ルール

- $f(x, y)$：微分可能な 2 変数関数
- $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$：微分可能
- $f(\xi, \eta) := f\big(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\big)$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix}$$

例

$$F\colon \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \longmapsto F(\xi,\eta) = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = A\boldsymbol{\xi}$$

例

A：2 次の正則行列

$$F\colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{\xi} \longmapsto A\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$$
$$F^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A^{-1}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$$

例

$$F\colon D \ni \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto F(r,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \in U$$

課題

- 講義資料や講義の誤りの指摘
- 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙で T2SCHOLA に

締切：7 月 4 日 17:00 JST