微分積分学第一 (LAS.M101-06)

チェイン・ルール

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/04

チェイン・ルール

- $f(x, y)$：微分可能な 2 変数関数
- $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$：微分可能
- $z = f(\xi, \eta) := f\bigl(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\bigr)$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix}$$

変数変換

主張 (命題 4.9)

平面の領域 D から U への 1 対 1 上への C^1-級写像

$$F\colon D \ni (\xi,\eta) \longmapsto (x,y) \in U$$

を考える．とくにその逆写像

$$G = F^{-1}\colon U \ni (x,y) \longmapsto (\xi,\eta) \in D$$

も C^1-級ならば，F の微分（ヤコビ行列）は正則で，

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix}^{-1}$$

が成り立つ．

例題：波動方程式と d'Alembert の解

c：定数；
C^2-級の 2 変数関数 $f(t,x)$ に対して

$$Df := \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

変数変換：

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \qquad y = \frac{1}{2c}(\xi - \eta)$$

例題：ラプラシアンと調和関数

C^2-級の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

変数変換

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$