微分積分学第一 (LAS.M101-06)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/09

お知らせ

- 中間試験の予告に対して「試験持ち込み用紙に別で印刷したものを貼ることは可能ですか」というご質問がありました. スキャナに通しづらくなるのでやめていただけると助かります.

ご意見から

- 転んでましたが怪我はありませんか？
  山田のコメント：ご心配おかけしました．この日は大丈夫でした．

- 合成関数を文字で表すと何がなんだかわからなくなるので，具体的な数字の計算もみたいです．
  山田のコメント：具体的な数字とは？

  1と2の合成関数
  2.

- 難しかったです．
  山田のコメント：よかった．大学まできて易しいことばかりじゃ萎えますよね．

訂正

20240704 黒板 B；ラプラシアンを極座標で表示する計算：
$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とするとき，

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$$

Jacobi 行列

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix}$$

逆行列

$$\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$(r, \theta) \longleftrightarrow (x, y)$$

補足

平均値の定理の証明：

定理： $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$：$(a,b)$ で微分可能，$[a,b]$ で連続
$\Rightarrow f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$, $a < c < b$ を満たす c が存在.

証明は

(x−a)

$$F(x) = f(x) - x\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

とおいて Rolle の定理を適用する.

このままでも OK.

F(a) = F(b)

補足

- 講義ノート 41 ページ，命題 4.6 の
  "$d(G \circ F)(\boldsymbol{x}) = dG(F(\boldsymbol{x}))dF(\boldsymbol{x})$" は
  "$d(G \circ F)(\boldsymbol{x}) = dG(\boldsymbol{x})dF(\boldsymbol{x})$" の誤りである

Nonsense!

というご指摘がありましたが，違います．

1変数

$$\frac{d}{dx} g \circ f(x) = g'(f(x)) f'(x)$$

$$F : U \longrightarrow V$$

$$G : V \longrightarrow W$$

$$dG(p), \quad p \in V$$

$$G \circ F(x) = G(F(x)), \quad x \in U$$

陰関数定理（定理 4.12）

定理： 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^k-級関数 $F\colon D \to \mathbb{R}$ と $F(x_0, y_0) = 0$ をみたす点 $P = (x_0, y_0) \in D$ をとる．もし，$F_y(x_0, y_0) \neq 0$ が成り立っているならば，P を含む領域 $U \subset D$ と，$\mathbb{R}$ のある開区間 I 上で定義された C^k-級の 1 変数関数 $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ で次をみたすものが存在する：

せまいはんい

yについて

$$\underline{(x, y) \in U} \quad \text{かつ} \quad F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in I \quad \text{かつ} \quad y = \varphi(x),$$

とくに各 $x \in I$ に対して $F\bigl(x, \varphi(x)\bigr) = 0$ が成立する． とける

$$F(x,y) = x^2+y^2-1$$

$$F(P) = 0$$

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (x_0\ y_0)$$

$$F_y(x_0\ y_0) = 2y\Big|_{(x,y)=(x_0\ y_0)} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \neq 0$$

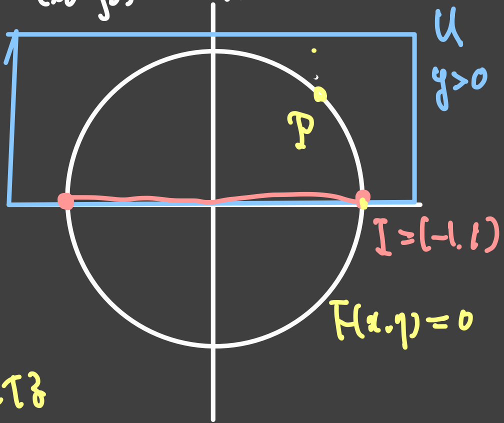
$$\varphi = \sqrt{1-x^2}$$

$(x,y) \in U$ かつ

$$F(x,y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \varphi(x)$$

φはつくれる



例：Lemniscate

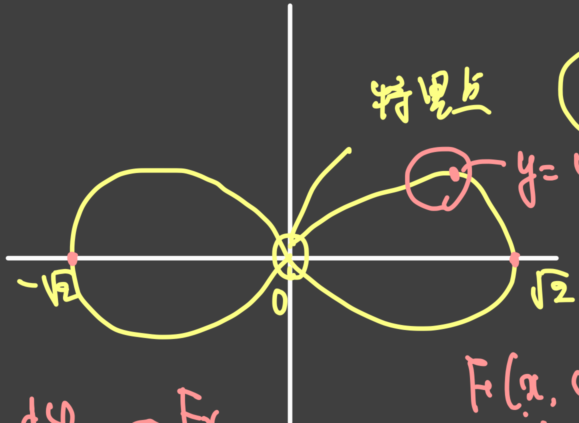
$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$$

$F_x = 4x(x^2+y^2-1) \qquad F_y = 4y(x^2+y^2+1)$

$F(x,y) = F_x(x,y) = F_y(x,y) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = y = 0$

陰関数定理は
使えない



$F_y \neq 0$

$y = \varphi(x)$

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

$\Downarrow$

xでビブン:

$$F_x + F_y \varphi'(x) = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = (-)\frac{F_x}{F_y}$$