微分積分学第一 (LAS.M101-06)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/09

お知らせ

- 中間試験の予告に対して「試験持ち込み用紙に別で印刷したものを貼ることは可能ですか」というご質問がありました．スキャナに通しづらくなるのでやめていただけると助かります．

ご意見から

- 転んでましたが怪我はありませんか？
  山田のコメント：ご心配おかけしました．この日は大丈夫でした．

- 合成関数を文字で表すと何がなんだかわからなくなるので，具体的な数字の計算もみたいです．
  山田のコメント：具体的な数字とは？

- 難しかったです．
  山田のコメント：よかった．大学まできて易しいことばかりじゃ萎えますよね．

訂正

20240704 黒板 B；ラプラシアンを極座標で表示する計算：
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき,

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix}$$

補足

平均値の定理の証明：

定理： $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$：$(a,b)$ で微分可能，$[a,b]$ で連続
$\Rightarrow f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$, $a < c < b$ を満たす c が存在.

証明は

$$F(x) = f(x) - x\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

とおいて Rolle の定理を適用する.

補足

- 講義ノート 41 ページ，命題 4.6 の
  “$d(G \circ F)(\boldsymbol{x}) = dG(F(\boldsymbol{x}))dF(\boldsymbol{x})$” は
  “$d(G \circ F)(\boldsymbol{x}) = dG(\boldsymbol{x})dF(\boldsymbol{x})$” の誤りである

というご指摘がありましたが，違います．

陰関数定理（定理 4.12）

定理： 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^k-級関数 $F\colon D \to \mathbb{R}$ と $F(x_0, y_0) = 0$ をみたす点 $P = (x_0, y_0) \in D$ をとる．もし，$F_y(x_0, y_0) \neq 0$ が成り立っているならば，P を含む領域 $U \subset D$ と，$\mathbb{R}$ のある開区間 I 上で定義された C^k-級の 1 変数関数 $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ で次をみたすものが存在する：

$$(x, y) \in U \quad \text{かつ} \quad F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in I \quad \text{かつ} \quad y = \varphi(x).$$

とくに各 $x \in I$ に対して $F\bigl(x, \varphi(x)\bigr) = 0$ が成立する．

例：Lemniscate

$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$$