微分積分学第一 (LAS.M101-06)

重積分の考え方

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/09

Q and A

$\gamma(t)$

Q: 映写資料 B (7/2) において、当初 $F(t) = f((t))$ と新たな関数 F を定義することにより F と f を区別して扱っていましたが，その後『何の関数と見做すかは大した問題ではない』という理由から F 及び f を統一的に f と表記するのだという説明がありました．関数は集合の元同士のある対応として定義されますが，関数 $f(x)$ について，関数そのものを表す f という記号を x に対応する値 $f(x)$ と同様に用いることが原因で生じる誤解や混乱はないのでしょうか?

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

あります.

$f(x(t), y(t))$

$\frac{df}{dt}$ ...

Q and A

Q: 講義ノート第 4 回，46p で，C^∞-級関数として $\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<1)$ を挙げていたが，ある関数が C^∞-級関数であるとはどのようにして示されるのですか．

- 多項式は C^∞-級
- $\sqrt{x}$ $(x>0)$ では C^∞-級
- C^∞級関数の合成関数は C^∞-級

"うまくかける関数は C^∞"

Q and A

Q: 極座標の写像（山田注：逆写像？）の定義において $h(x)$ が出てきますが，$x > 0$ のときは $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$，$x \leqq 0$ のときは $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{y}$ と x と y の分母分子が入れ替わっている理由がわからないので教えていただきたいです.

講義ノート 4, 43 ページ

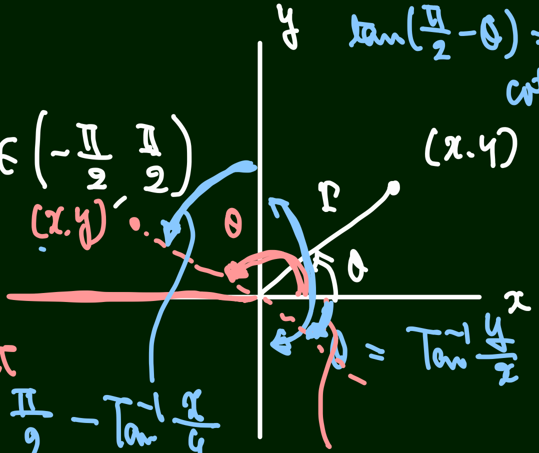
- $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r > 0,\ -\pi < \theta < \pi)$
- $r = \sqrt{x^2+y^2},\ \ \theta = h(x,y)$ = atan2(x, y)

$$h(x,y) := \begin{cases} \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x} & (x > 0) \\ -\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x}{y} + \dfrac{\pi}{2} & (x \leqq 0, y > 0) \\ -\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x}{y} - \dfrac{\pi}{2} & (x \leqq 0, y < 0) \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$$



$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$$

$$\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{y}$$

$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$$

積分をきちんと定義するのはめんどう (いろいろ準備)

- 閉区間 $[a,b]$ の**分割**：

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N\} \qquad (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b)$$

- 分割 Δ の幅：

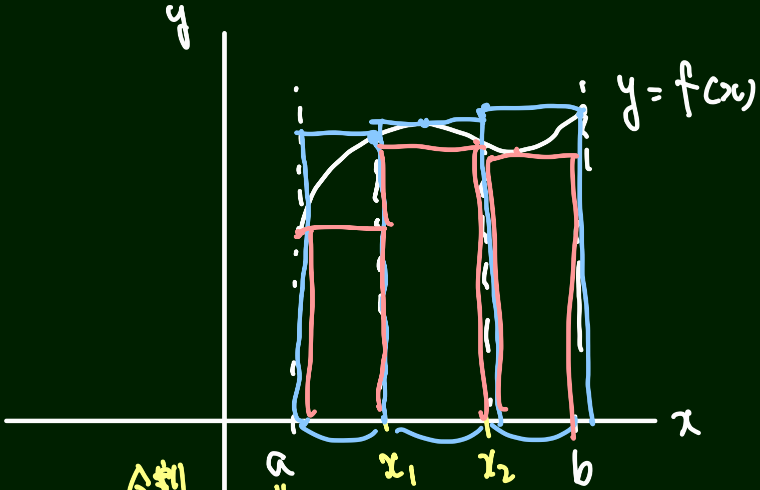
$$|\Delta| := \max\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \ldots, |x_N - x_{N-1}|\}.$$

$f\colon I = [a,b]$ で定義された 1 変数関数.

$$\overline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \bar{f}_j \underline{\Delta x_j}, \quad \underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \underline{f}_j \Delta x_j, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

$\bar{f}_j :=$ (区間 $[x_{j-1}, x_j]$ での f の "最大値"),

$\underline{f}_j :=$ (区間 $[x_{j-1}, x_j]$ での f の "最小値").



分割

Δ : $a = x_0$, x_1, x_2, $b = x_3 = x_N$

$$|\Delta| = \max_{j} |x_{j+1} - x_j|$$

1 変数関数の積分再論 2

定義

区間 I で定義された関数 f が I で**積分可能** $\Leftrightarrow$ I の分割 Δ の幅が 0 に近づくとき $\overline{S}_\Delta(f)$, $\underline{S}_\Delta(f)$ が同じ値 S に近づく．この値を

$$\int_I f(x)\,dx \quad \left(= \int_a^b f(x)\,dx\right).$$

と書く.

定積分は"こんな感じ"で定義する

$f\colon [a,b]$ で定義された連続関数.

事実 (定理 5.9, 定理 5.11)

- f は積分可能. Darboux
- $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. 微積分の基本定理.

F が f の原始関数 $\Leftrightarrow F' = f$

命題 (命題 5.12)

区間 I で連続な関数 f に原始関数が存在する.

証明　$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ とおけばよい.

高校の教科書流

命題 (命題 5.14)

定積分の公式

これが

定積分の定義

連続関数 f の原始関数を F とするとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

高校での解説は全て有効.

・高校流の定義は何がまずいか？

あたえられた関数の原始関数の存在がいえない。

実際、初等関数で原始関数が初等関数でないものが存在する