

# 微分積分学第一 (LAS.M101-06)

重積分の考え方

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/>

東京工業大学

2024/07/09

## Q and A

Q: 映写資料 B (7/2) において、当初  $F(t) = f(t)$  と新たな関数  $F$  を定義することにより  $F$  と  $f$  を区別して扱っていましたが、その後『何の関数と見做すかは大きな問題ではない』という理由から  $F$  及び  $f$  を統一的に  $f$  と表記するのだという説明がありました。関数は集合の元同士のある対応として定義されますが、関数  $f(x)$  について、関数そのものを表す  $f$  という記号を  $x$  に対応する値  $f(x)$  と同様に用いることが原因で生じる誤解や混乱はないのでしょうか？

## Q and A

Q: 講義ノート第4回, 46p で,  $C^\infty$ -級関数として  $\sqrt{1-x^2}$  ( $-1 < x < 1$ ) を挙げていたが, ある関数が  $C^\infty$ -級関数であるとはどのようにして示されるのですか.

## Q and A

Q: 極座標の写像（山田注：逆写像？）の定義において  $h(x)$  が出てきますが、 $x > 0$  のときは  $\text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$ 、 $x \leq 0$  のときは  $\text{Tan}^{-1} \frac{x}{y}$  と  $x$  と  $y$  の分母分子が入れ替わっている理由がわからないので教えていただきたいです。

講義ノート 4, 43 ページ

▶  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  ( $r > 0, -\pi < \theta < \pi$ )

▶  $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = h(x, y)$

$$h(x, y) := \begin{cases} \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} & (x > 0) \\ -\text{Tan}^{-1} \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2} & (x \leq 0, y > 0) \\ -\text{Tan}^{-1} \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2} & (x \leq 0, y < 0) \end{cases}$$

# 1 変数関数の積分再論 1

- ▶ 閉区間  $[a, b]$  の分割：

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b)$$

- ▶ 分割  $\Delta$  の幅：

$$|\Delta| := \max\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \dots, |x_N - x_{N-1}|\}.$$

$f: I = [a, b]$  で定義された 1 変数関数.

$$\bar{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^N \bar{f}_j \Delta x_j, \quad \underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^N \underline{f}_j \Delta x_j, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

$\bar{f}_j :=$  (区間  $[x_{j-1}, x_j]$  での  $f$  の “最大値”),

$\underline{f}_j :=$  (区間  $[x_{j-1}, x_j]$  での  $f$  の “最小値”).

# 1 変数関数の積分再論 2

## 定義

区間  $I$  で定義された関数  $f$  が  $I$  で**積分可能**  $\Leftrightarrow I$  の分割  $\Delta$  の幅が 0 に近づくとき  $\overline{S}_\Delta(f)$ ,  $\underline{S}_\Delta(f)$  が同じ値  $S$  に近づく. この値を

$$\int_I f(x) dx \quad \left( = \int_a^b f(x) dx \right).$$

と書く.

# 1 変数関数の積分再論 3

$f: [a, b]$  で定義された連続関数.

事実 (定理 5.9, 定理 5.11)

- ▶  $f$  は積分可能.
- ▶  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ .

# 1 変数関数の積分再論 4

命題 (命題 5.12)

区間  $I$  で連続な関数  $f$  に原始関数が存在する.

# 1 変数関数の積分再論 5

命題 (命題 5.14)

連続関数  $f$  の原始関数を  $F$  とするとき,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$