積分 ≒ 面積 と思いすぎない

微分積分学第一 (LAS.M101-06)

重積分の考え方

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/09

- まじめにやらない

  たとえ話

  (これだけで計算はできる)
- 次回 少しまじめにやる

多変数関数の積分

- "重積分"
- "原始関数" に
  相当するものはない

棒の質量と線密度

数直線上の区間 $[a, b]$ 上に横たわる棒の質量 M を求めよう．

- 棒の線密度 σ が一定なら，

単位長さあたりの質量

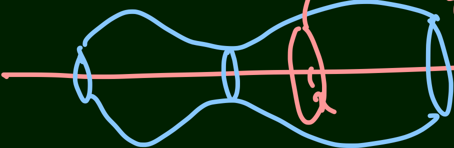
$$M = \sigma(b-a).$$

- 棒の位置 x における線密度 $\sigma(x)$ が与えられている時

$$M = \int_a^b \cancel{\rho}\,\sigma(x)\,dx$$

$\sum \sigma(x)\Delta x$

微小巾



$\sigma(x)$

x を含む小さい区間での平均線密度の極限

板の質量と面密度

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D 上に横たわる板の質量を求めよう．

- 板の面密度 μ が一定なら，

$$M = \mu|D|$$

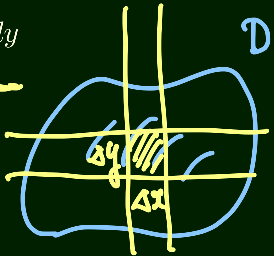
  ただし $|D|$ は D の面積．

- 板の位置 (x, y) における線密度 $\mu(x, y)$ が与えられている時

面積分．

$$\underline{M = \iint_D \mu(x, y)\, dx\, dy}$$

$$\sum \mu(x, y) \Delta x\, \Delta y$$

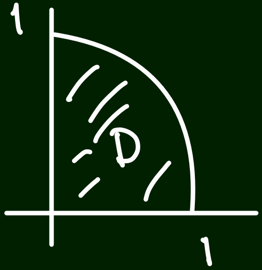


計算例

積分範囲

$$\iint_D x^2\,dx\,dy \qquad D = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\}$$

2変数関数　被積分関数



$x^2\,\Delta x\,\Delta y$

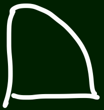
$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2\,\Delta x\right) dy$$

x: 固定

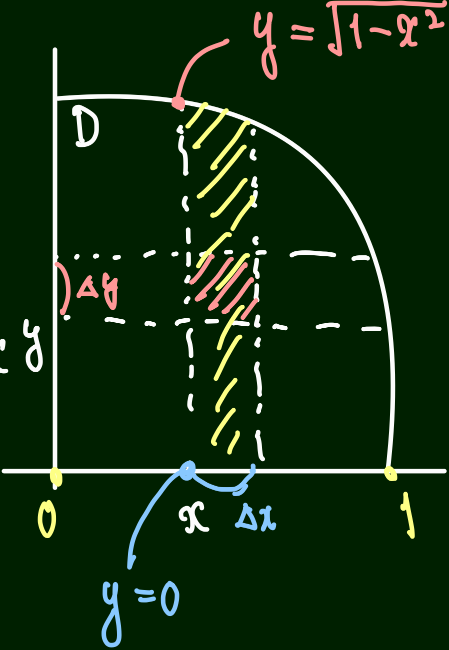
$$= \underline{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\Delta x$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{16}$$



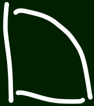
xを動かす

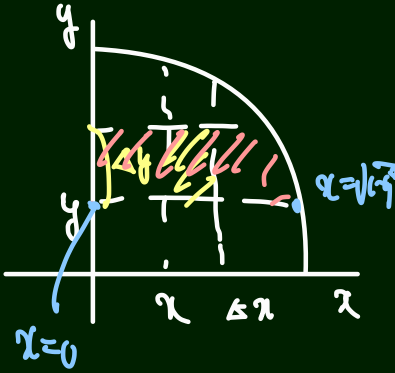


$x^2 \Delta x \Delta y$

$$\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2 \underbrace{\Delta y}_{\text{fix}} \, dx$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{1-y^2}^{\,3}\,\Delta y$$





$$= \int_0^1 \frac{1}{3}\sqrt{1-y^2}^{\,3}\,dy = \frac{\pi}{16}$$

課題

- 講義資料や講義の誤りの指摘
- 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙で T2SCHOLA に

締切：7 月 11 日 17:00 JST