

2024年7月9日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 (LAS.M101-06) 講義資料 9

■重要なお知らせ

- 中間試験の予告に対して「試験持ち込み用紙に別で印刷したものを貼ることは可能ですか」というご質問がありました。スキャナに通しづらくなるのでやめていただくと助かります。

■お知らせ

- 今回は期限までに87名の方から課題の提出がありました。T2SCOLAからフィードバックを行っています。なお、用紙に記入されているコメントは山田用のメモです。読めない字があるかもしれませんが、この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください。

■前回の補足

- 平均値の定理の証明で、Rolleの定理を適用する関数を

$$F(x) = f(x) - x \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{でなく} \quad F(x) = f(x) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

とおくのが正しい、というご指摘をいただきました。どちらも $F(a) = F(b)$ が得られるので Rolle の定理が適用できませんか？

- 講義ノート 41 ページ、命題 4.6 の “ $d(G \circ F)(\mathbf{x}) = dG(F(\mathbf{x}))dF(\mathbf{x})$ ” は “ $d(G \circ F)(\mathbf{x}) = dG(\mathbf{x})dF(\mathbf{x})$ ” の誤りである、というご指摘がありました。違いますが、 dG の \mathbf{x} における値は何でしょう？
- 陰関数定理についてあまりよく理解できなかったというご意見がありました。ほとんどきちんとやっていないので、今回少し説明します。

■前回までの訂正

- 20240702 講義資料, 1 ページ, お知らせの 2 行目: T2SCOLA \Rightarrow T2SCHOLA
- 講義ノート 41 ページ, 定義 4.5 の数式:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

- 講義ノート 45 ページ, 定理 4.12 の 2 行目: $(x_0, y_0) \in D$ とする $\Rightarrow P := (x_0, y_0) \in D$ とする
- 20240704 黒板 B のラプラシアンを極座標で表示する計算の中で

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

- 20240702 講義資料, 質問 52: “はどうではないのですか” \Rightarrow “は同値ではないのですか”

■授業に関する御意見

- 合成関数を文字で表すと何がなんだかわからなくなるので、具体的な数字の計算もみたいです。山田のコメント 具体的な数字とは? 「1 と 2 の合成関数」とかいうの?
- 難しかったです 山田のコメント よかった
- 転んでましたが怪我はありませんか? 山田のコメント この日は大丈夫でした
- 授業で使う資料が多い(講義資料, 映写資料, 本 2 冊とそれ以外)ので、講義のとき今はどんな資料を使っているを明示してはいいいですか? 山田のコメント 基本的に講義ノート
- 中間試験がマイナス要素とならないことは良い。山田のコメント はい
- 中間試験で狼煙を見るための双眼鏡の持ち込みは禁止されているが、まず狼煙をどのようにして使うのかわかりません。山田のコメント: 私もです。
- 冷房つけたら寒いし、つけないと寒いのが辛いです。山田のコメント ですよ

- ξ が書き慣れないので、この場を借りて、練習させていただきます。 $\xi\xi\dots$ (以下略) 山田のコメント 1つだけ違うとか?
- 今回の授業は少し進みが早い気がして、途中からおいていかれてしまった 山田のコメント 計算をちゃんとやったからですね
- ありません 山田のコメント me, too
- 内容の誤りを見つけようとしたが、誤字を見つけるくらいしかなかったか? 山田のコメント そう?
- 期末テストの作成者は誰ですか? 山田のコメント 山田
- XD 山田のコメント?
- 特にごさいません・ありません 山田のコメント me, too
- なし 山田のコメント はい
- 好きです 山田のコメント me, too

質問と回答

質問 1: 座標平面上ではある 2 点からの距離の積や比が一定である点の集合はそれぞれ Cassinian oval, アポロニウスの円となりましたが、座標空間上においてある 2 点からの距離の積や比が一定である点の集合を考えた場合どのような結果が得られますか。

お答え: やってみましょう。2 点 $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$ からの距離を考えることにして、対象となる図形を x 軸を含む平面で切ったとき、切り口はどのような曲線になりますか?

質問 2: 極座標の写像 (山田注: 逆写像?) の定義において $h(x)$ が出てきますが、 $x > 0$ のときは $\tan^{-1} \frac{y}{x}$, $x \leq 0$ のときは $\tan^{-1} \frac{x}{y}$ と x と y の分母分子が入れ替わっている理由がわからないので教えていただきたいです。

お答え: \tan^{-1} の像が $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ だから全周の偏角を一つの \tan^{-1} で表せない。

質問 3: $(\frac{x}{y}) \in \mathbb{R}^2$ である $(\frac{x}{y})$ を有限な範囲 (たとえば $|s| < 1$, $|t| < 1$) の $(\frac{s}{t})$ に 1 対 1 で対応づけることはできますか。お答え: たとえば $s = \tanh x$, $t = \tanh y$ 。

質問 4: 20240704 映写資料 B, d'Alembert の解の話で登場した Df はどのような意味を持ちますか?

お答え: f に対して Df という関数を対応させる, ある規則をここでは D と書いた。その場限りの記号。

質問 5: $(df)_{Pv} = \frac{d}{dt} | + t = 0F(P + tv)$ は何を表しているかわからないのですが、説明していただけますか?

お答え: 右辺は関数 $t \mapsto F(P + tv)$ の $t = 0$ における微分係数。

質問 6: 講義ノート第 4 回, 46p で, C^∞ -級関数として $\sqrt{1-x^2}$ ($-1 < x < 1$) を挙げていたが, ある関数が C^∞ -級関数であるとはどのようにして示されるのですか。お答え: やってみます。

質問 7: 調和関数の名前の由来が知りたい。お答え: 「調和関数に関する平均値の定理」で調べてみよう。

質問 8: 映写資料 B (7/2) において、当初 $F(t) = f((t))$ と新たな関数 F を定義することにより F と f を区別して扱っていましたが、その後『何の関数と見做すかは大した問題ではない』という理由から F 及び f を統一的に f と表記するのだという説明がありました。関数は集合の元同士のある対応として定義されますが、関数 $f(x)$ について、関数そのものを表す f という記号を x に対応する値 $f(x)$ と同様に用いることが原因で生じる誤解や混乱はないのでしょうか?

お答え: ある。なので気をつけるべき。数学の文脈では安全なことが多いが、物理などではときどき危ない。

質問 9: 物理で波といえば \sin や \cos を使った式だと思っていたのですが、 $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ の波動方程式は \sin や \cos ととにかく関係があるんですか?

お答え: 高等学校で習った正弦波は $u = \sin(x - ct)$ のような形をしていませんか?

質問 10: 陰関数定理はどのような時に有効ですか。

お答え: いくつかの変数の関係式の各変数の依存関係を調べるとき。

質問 11: 調和関数はよく物理で使われるイメージが強いが、数学ではどのような形で使われることが多いか気になった。

お答え: 気になりましたか。20240618 黒板 A 4 ページ

質問 12: Chain rule の他変数に拡張した場合の証明として、行列にベクトルのようなノルムを定義して示すものを見たことがあるのですが、それ以外の方法を、もしあるのならば、教えてほしいです。

お答え: どういう方法かわからないのでそれ以外が何かわかりません。

質問 13: よく数学ではギリシャ文字を使う傾向にあります。なぜギリシャ文字を使うのですか。また、いつから数学でギリシャ文字を使うようになったのですか。

お答え: さあどうでしょう。Euclid の原論はギリシャ文字を使っています。B.C.300 です。

質問 14: ヤコビ行列は正則であるが、 n 次の文字 (x, y, z, \dots) が全て n 変数の関数である場合、その関数の微分は行列に関する性質を持つのか。お答え: 一般に Jacobi 行列は正則とは限らない。

- 質問 15: 講義ノート 3 の P.33 の命題 23 の $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ が成り立つことの証明が詳しく述べられているが, (3.7) の式の $dF = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ から両辺を dt で割って $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ を示すことができるのだろうか **お答え:** “割る” の意味は?
- 質問 16: 微分と行列にはどのような関係があるんですか? **お答え:** 文脈がわからない
- 質問 17: ヤコビ行列の導出方法はいくつかありますか. 今の知識で解けるものはありますか.
お答え: ヤコビ行列の導出とは何か. ただ計算するだけでは?/ ものが何を指すいるのかわからないので答えられない.
- 質問 18: 写像と関数の違いってなんですか? 方向微分の図形的な意味はありますか?
お答え: 20240702 黒板 A 4 ページ / 20240625 黒板 A 4 ページ
- 質問 19: チェインルールは画期的なものだと思ったので, 名前の由来を知りたいと思った.
お答え: 講義で少し説明しましたね.
- 質問 20: チェインルールのメリットは何ですか? **お答え:** 20240618 黒板 A 4 ページ
- 質問 21: 変数変換により例えば「二変数関数から一変数関数にする」というように変数の数を減らすような変数変換の方法はあるのか? **お答え:** 講義ノート 33 ページの (3.9) 式
- 質問 22: 木曜日の黒板 10 ページ目 3 行目からの計算はどのように考えたのか.
お答え: 黒板が 3 つあるので特定できない
- 質問 23: 記号 ∂ は一変数関数の微分を書くのに使えますか? (この場合, d と全く同じ働きです)
お答え: 意図的に使うことはまれにありますが通常使いません.
- 質問 24: 7/4 の映写資料 B の波動方程式のスライドで, 変数変換で x と t を表していたが, その式の分母に x と c がなく t には c があるが, なぜそのような違いがあるのか. **お答え:** t に c があるとはどういうことですか?
- 質問 25: ラプラスアンを考えることのメリットは何でしょうか? **お答え:** 20241618 黒板 A 4 ページ
- 質問 26: チェインルールとは, 合成関数の微分の多変数関数版のように考えてよいのでしょうか?
お答え: そういいませんでしたっけ
- 質問 27: そもそも微分も偏微分も微分を表すときに dy/dx のように分数で表すのはなぜですか?
お答え: 極限をとる前は商だから
- 質問 28: 2 変数関数の微分では, dx や ∂x が分数として扱えない例がありますが, 記号をうまく定義することでどんな場合でも分数として扱えるようにできますか. **お答え:** どういう形の公式が望ましいかを想像できるか?
- 質問 29: 関数の方向微分は, 幾何学的にどのようなイミを持つのかを知りたい.
お答え: 定義域を速度 v で移動したときの関数の変化率. 幾何学的とは?
- 質問 30: 次の中間試験や期末試験は「微分積分学演習」の問題が全て自力で解けたら高得点が取れるくらいの難易度ですか? **お答え:** どうでしょう. 過去問探してみてください.
- 質問 31: 7/4 の映写資料の最後のページの計算で $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta$ となっていました, どのような計算をすればこのようになりますか. **お答え:** 3 つあるがどれ? 黒板?
- 質問 32: $(x, y) \rightarrow (a, b)$ は x, y があらゆる“方向”ではなく“経路”で近づくことを意味するとあったが, 演習の授業で $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ や $y = mx$ ($r, \theta, m \in \mathbf{R}, r \neq 0, m \neq 0$) として $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ を解いたがこの解き方に問題があるということですか? 前者に関しては θ が r の関数と見れば可能かもしれませんが後者は $(1, m)$ ベクトルに平行な方向 (直線的に) しか近づけない (しかも m が 0 や無限大も表せない) ことになっていませんか?
お答え: どういう問題をどう解いたかによる
- 質問 33: (偏) 微分で, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ のように引数を分けて書いていることになにか特別な意味はありますか?
お答え: 分けなくて書くとはどういうこと?
- 質問 34: df の変形について, 7/2 の黒板 A の最終スライドにある変形ですが, $df = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy$ が等号であるのはなぜですか. **お答え:** 上に青字で書いた式と等しいから
- 質問 35: チェイン・ルールや陰関数定理など講義でも講義ノートでも証明をしていない定理は, 証明が複雑だから省いている, ということですか? それとも現段階では証明をすることができないから証明を省いている, ということですか? **お答え:** 両方
- 質問 36: 7月2日の映写資料 B について, f が連続であれば証明は正しくなりますか?
お答え: たくさんページはありますがどれですか?
- 質問 37: $:=$ (コロンイコール) と $=$ (イコール) の違いはなんですか? **お答え:** 20240618 黒板 A 5 ページ
- 質問 38: 2 変数のラプラスアンはグラフ上のイメージでどのようなものに対応していますか?

お答え： 20240618 黒板 A 4 ページ / Laplacian に関する平均値の公式

質問 39： 講義ノートで勾配ベクトルは $\text{grad } f$ のように表されるとありましたが、この grad というのはただ単に勾配ベクトルであるということを示しているのですか？ それとも何か別のこと (向きや単位など) も同時に表しているのですか？ お答え： (多分) そこにあるのが $\text{grad } f$ の定義

質問 40： 講義ノート p.48 の波動方程式 $f_{tt} = c^2 f_{xx}$ の「 tt 」と「 xx 」は何を示している記号ですか。

お答え： t で 2 回微分

質問 41： 立った d は分数のように扱うことができるのにラウンド d は分数のように扱うことができないのは何の違いに依るものなのですか。 お答え： 独立変数の個数

質問 42： ヤコビ行列やラプラシアンはどのような場合に使われますか。

お答え： 20240618 黒板 A 5 ページと同様の質問

質問 43： $f(x, y)$ で $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のとき、 $\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$ ですが、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2 \theta f_{rr} - \frac{2}{r} \cos \theta \sin \theta f_{r\theta} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r} \sin^2 \theta f_{rr} + \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta f_{r\theta}$ の下線部分はどのような計算から出てくるかわかりません。 お答え： $-\frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta})$ の後半

質問 44： 最後のスライド ラプラシアンと調和関数のところで変数変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ の θ が r の関数 $\theta(r)$ である可能性は考えないのですか。

お答え： 2 変数 (x, y) と 2 変数 (r, θ) の関係ですので x と y , r と θ は独立という設定です。

質問 45： 7/4 の映写資料 A にある「狼煙を見るための双眼鏡」という言葉はなにかの比喻ですか、それともことわざですか。 お答え： 外部と通信することの例示

質問 46： 写像と逆写像は何が違うのですか？ お答え： 関数と逆関数の関係との同じ

質問 47： 写像とはグラフ的に見て、関数を取りうる値のなす形としてしか見れないのか式を見て関数に写像に関する知識 (逆写像など) を想像しうるのか気になる。 お答え： むしろそう見るなど言っている / 気になる？

質問 48： 今回の講義では線形代数の範囲の内容が出ていましたが、数学を線形代数や微分積分など分割して学ぶことのメリットやデメリットはありますか。 お答え： 数学は全てつながっています。

質問 49： 中間試験の問題と期末試験の問題は似たような形式で出題されるのか、それとも中間試験では出されなかったような問題を出す (例えば中間では定義を問う問題を出さなかったが期末では出題する) ことはあるのでしょうか？ お答え： おたのしみ。 20240702 黒板 A の「中間試験の目的」参照

質問 50： $\frac{dy}{dx} \neq dy \div dx$ ですが、なぜチェインルールでは $\frac{dy}{dx} \neq \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$ が成立しますか。 この 2 つは関係ありますか。

お答え： この式が (割り算を使わずにたまたま別の方法で) 証明できるからです。

質問 51： 全ての写像 F は対応する逆写像があるか。例えば、床関数の写像には逆写像があるか。

お答え： ない。例えば $f(x) = x^2$ に逆関数は存在するか。

質問 52： $\text{grad } f_p$ はどのような場面で使われますか。 お答え： 力学や電磁気学で出てきませんでしたか？

質問 53： 曲線に沿う微分はどの曲線にそって微分しているのでしょうか。

お答え： 講義ノートにある $(x(t), y(t))$ は何を指していますか？