微分積分学第一 (LAS.M101-06)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/11

中間試験（期末試験）予告

以下の要領で中間試験を実施します

日時： 2024 年 7 月 18 日（木曜日）10 時 50 分–12 時 20 分
(10 時 45 分までには指定の座席に着席してください)

場所： WL1-401 講義室（この科目の講義・演習の会場）

試験範囲： 主として 7 月 16 日までの講義で扱った内容.

欠席： 中間試験受験は単位を得るための必要条件.
欠席の場合は事前に担当者まで連絡.

持ち込み： **持込用紙（A4 版）**(T2SCHOLA にあり) 1 枚のみ持ち込み可． この用紙は試験後**回収する**.

返却： 答案は 7 月 23 日（火曜日）の講義までに返却する.
その際，期末試験用の持込用紙を配布する.

計算用紙： 計算用紙は配布しない.

記号等： 原則として講義や問題で用いたもの.
それ以外のものを使うときは，その旨明記すること.

成績評価の方法

- 期末試験（8 月 1 日）の得点（80 点満点）と演習の得点（20 点満点）の和を評価の基本点とする.
- 合格者平均点を 80 点とするために，提出課題および中間試験の評価を用いて調整を行うことがある．課題の得点と中間試験の得点は同一ウェイトとする.
- 成績評価は，提出課題・中間試験答案・期末試験答案に記述されたもののみを材料とする.

中間試験の目的：

- 期末試験の予行演習.
- 受講者の動向調査.
- 期末試験で「失敗」した人への救済処置.

1 変数関数の積分について

“誤差論”

ガウスの誤差関数　語源？　しらべてください

・error function

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt$$

積分は存在する

見か

右辺の積分は初等関数ではない

どうやって証明するか

非自明

Liouvilleの結果を使う

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

Deutsche Bundesbank, Frankfurt am Main, Germany

求め方　最終回.

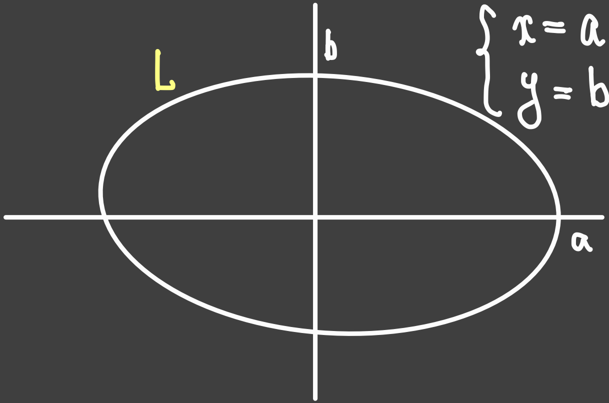
1 変数関数の積分について

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$ の弧長を L とすると

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt \qquad k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$-\pi \leqq t \leqq \pi$



$\cdot\ x = a\cos t,\ y = b\sin t \qquad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

みはじの式

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\, dt$$

$$= 2a \int_{0}^{\pi} \sqrt{1 - \underbrace{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}_{k^2}\cos^2 t}\, dt$$

$$= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t}\, dt \qquad t = \frac{\pi}{2} - u$$

$$= 2a \int_{\frac{\pi}{2}\ -\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}\, \left(\overset{+}{-}du\right)$$

$$= 2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt$$

$$= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt$$

$k \in (0,1)$なら 被積関数は 初等関数でない.

(第2種)楕円積分

kがすごく小さいとき

$$\sqrt{1-k^2\sin^2 t} \fallingdotseq \underline{1-\frac{1}{2}k^2\sin^2 t}.$$

☆ $\sqrt{1-x} \fallingdotseq 1-\frac{x}{2}$ $|x|$:すごく小.

☺ $\sqrt{1-x} = 1-y$ y小:y^2 ω.

$$1-x = 1-2y+\cancel{y^2}$$

$$\fallingdotseq 1-2y \qquad y \fallingdotseq \frac{x}{2}$$

1 変数関数の積分について

$$\int_0^x \operatorname{sech} u\, du = \int_0^x \frac{du}{\cosh u}$$

$$= \int_0^x \frac{\cosh u}{\cosh^2 u} du$$

$$= \int_0^x \frac{\cosh u}{1+\sinh^2 u} du$$

$$= \int_0^{\sinh x} \frac{dv}{1+v^2}$$

$$= \left[\mathrm{Tan}^{-1} v \right]_0^{\sinh x} = \mathrm{Tan}^{-1} \sinh x$$

$$\operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u}$$

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

$$(\sinh u)' = \cosh u$$

$\leftarrow v = \sinh u$

$dv = \cosh u\, du$

$$(\mathrm{Tan}^{-1} v)' = \frac{1}{1+v^2}$$

$$\int_0^x \frac{du}{\cosh u} = \int_0^x \frac{2du}{e^u + e^{-u}}$$

$$= \int_0^x \frac{2e^u}{1+e^{2u}}\,du$$

$$= \int_1^{e^x} \frac{2dv}{1+v^2}$$

$$= 2\left[\mathrm{Tan}^{-1} v\right]_1^{e^x}$$

$$= 2\left(\mathrm{Tan}^{-1} e^x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \mathrm{Tan}^{-1} \sinh x$$

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

$e^u = v$

- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$
- $\tan 9$

$2\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$

?