重積分の定義

あまりきっちりではない

微分積分学第一 (LAS.M101-06)

重積分の考え方

ごまかしがある

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

お話

東京工業大学

2024/07/11

長方形

長方形：$(a < b,\ c < d)$

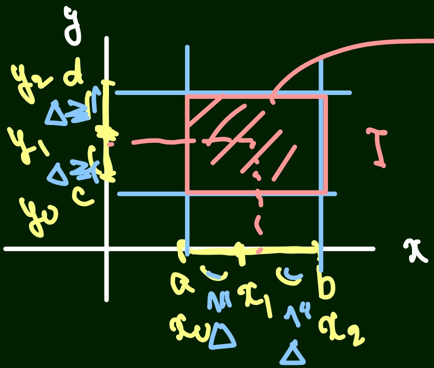
$$\begin{aligned} I := [a,b] \times [c,d] &= \{(x,y) \mid x \in [a,b], y \in [c,d]\} \\ &= \{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\} \subset \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

分割：

$$\Delta : \begin{cases} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d \end{cases}$$

分割の幅：

$$|\Delta| := \max \left\{ |x_j - x_{j-1}|, |y_k - y_{k-1}| \,;\, \begin{matrix} j = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, n \end{matrix} \right\}$$



$[a, b] \times [c, d]$

直積

長方形上の重積分

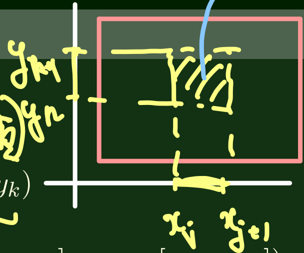
$f : I = [a,b] \times [c,d]$ を含む領域で定義された 2 変数関数

$f(\xi_{jk}, \eta_{jk})$

定義

f が I で積分可能 $\Leftrightarrow$ 和

(▨ の面積)



$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{jk}, \eta_{jk})\underbrace{(x_{j+1} - x_j)(y_{k+1} - y_k)}$$

(ただし $\xi_{jk} \in [x_{j-1}, x_j]$, $\eta_{jk} \in [y_{k-1}, y_k]$)

が，幅 $|\Delta|$ を 0 に近づけるとき，(ξ_{jk}, η_{jk}) のとり方によらずに一定の値 S に近づく．

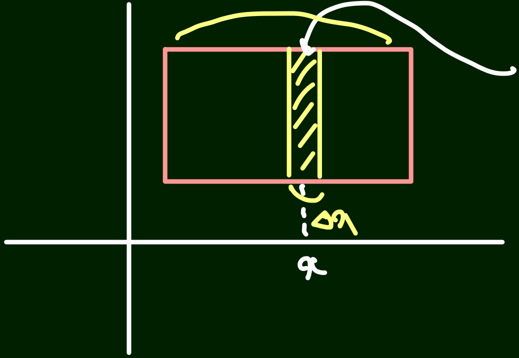
$$\boxed{S = \iint_I f(x,y)\,dx\,dy.}$$

(fの原始関数：一般にはない)

長方形上の重積分と累次積分

$f: I = [a,b] \times [c,d]$ を含む領域で定義された 2 変数関数

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$



$$\Delta x \underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{x\text{の関数}}$$

とめる

長方形でない場合の積分

$D \subset \mathbb{R}^2$

- D が閉集合 $\Leftrightarrow$ D の補集合が開集合 ・境界を含む はんい
- D が有界 $\Leftrightarrow$
  $I = [a, b] \times [c, d]$ を十分大きく取れば $D \subset I = [a, b] \times [c, d]$.
- D がコンパクト $\Leftrightarrow$ D は有界かつ閉.

例：

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$$

$\{(x,y) \mid f(x,y) \geqq 0\}$ 　f:連続

閉

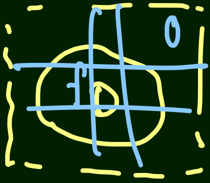
$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$ ：閉円板

$\{(x,y) \mid x \geqq 0\}$ ：右半平面

非有界

コンパクト集合上の積分

$D \subset \mathbb{R}^2$：コンパクト；$D \subset I = [a,b] \times [c,d]$
f：D を含む領域で定義された 2 変数関数



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy := \iint_I \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D, (x,y) \in I \end{cases}$$

面積確定集合

$D \subset \mathbb{R}$：コンパクト

定義

D が面積確定 $\Leftrightarrow$ 定数関数 1 が D 上積分可能.

$$|D| := \iint_D 1 \, dx \, dy$$

Dの面積

(定義)

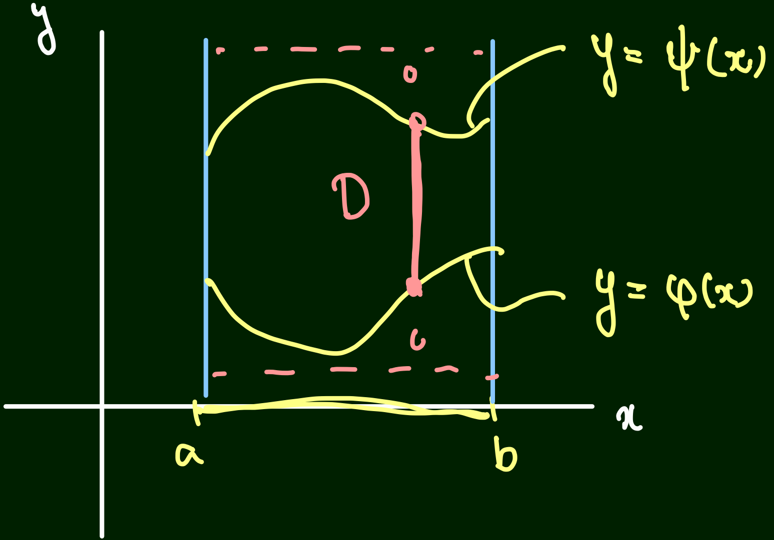
累次積分

命題 (命題 5.19)

- $\varphi(x)$, $\psi(x)$：区間 $[a,b]$ 上の (1 変数) 連続関数
- $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$

$\Rightarrow$

- $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x), a \leqq x \leqq b\}$ はコンパクトかつ面積確定集合.
- $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \underbrace{\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right]}_{x\text{の関数}} dx$$


y
x
a
b
D
y = ψ(x)
y = φ(x)

累次積分

命題 (命題 5.19)

- $\alpha(y)$, $\beta(y)$: 区間 $[c, d]$ 上の (1 変数) 連続関数
- $\alpha(y) \leqq \beta(y)$ $(c \leqq y \leqq d)$

$\Rightarrow$

- $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha(y) \leqq x \leqq \beta(y), c \leqq y \leqq d\}$
  はコンパクトかつ面積確定集合.
- $\displaystyle \iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx \right] dy$

累次積分の記号

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_c^d \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

$$= \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$