

# 微分積分学第一 (LAS.M101-06)

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

`http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/`

東京工業大学

2024/07/16

# お知らせ

- ▶ 締め切りまでに 85 名の方から課題の提出がありました。
- ▶ すでに予告しましたとおり，次回 7 月 18 日は中間試験を行います。お忘れなきよう。

感染症 : 体調不良  
→ 欠席

## Q and A

Q: 7月4日の講義資料に「答えは7/23までに返却する」といった内容が書かれているが、中間試験の持ち込み用紙は返却されないのか。

返却予定；期末試験用紙は別。

Q: 中間試験についてなのですが、持ち込み用紙の空いているスペースを計算用紙の代わりにしても良いでしょうか？

はい。

# Q and A

いろいろ質問 - 7かある

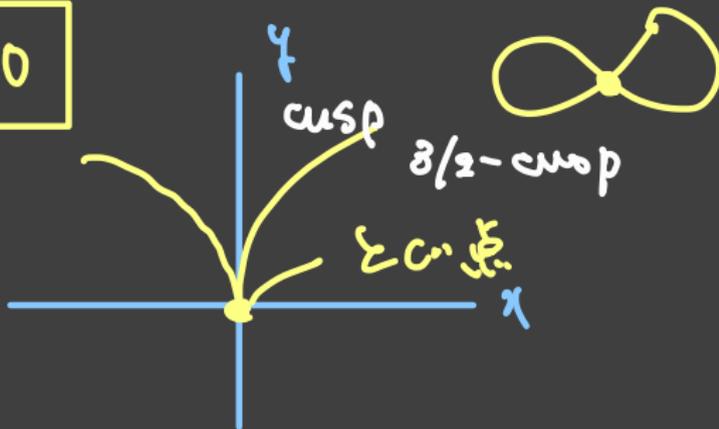
Q: 9日の講義で挙げられた Lemniscate は特異点が  $(0,0)$  にありました. 一般に特異点はグラフの線 (原文ママ: 曲線のことか?) が交わる点ですか?

A: いいえ

$$F(x, y) = (x^2 - y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$$

$$(0,0) \text{ と } \text{cusp 点} (F_x = F_y = 0)$$

$$x^2 - y^3 = 0$$



## Q and A

Q: 弧長が積分を使って求められるのはなぜですか。高校範囲ですが、ずっと不思議でした。

Q:  $xyz$  空間であらわされる関数の曲線の長さ (原文ママ: 関数の曲線とは?  $xyz$  空間であらわされるとは?) はどのようにして求められるんですか?

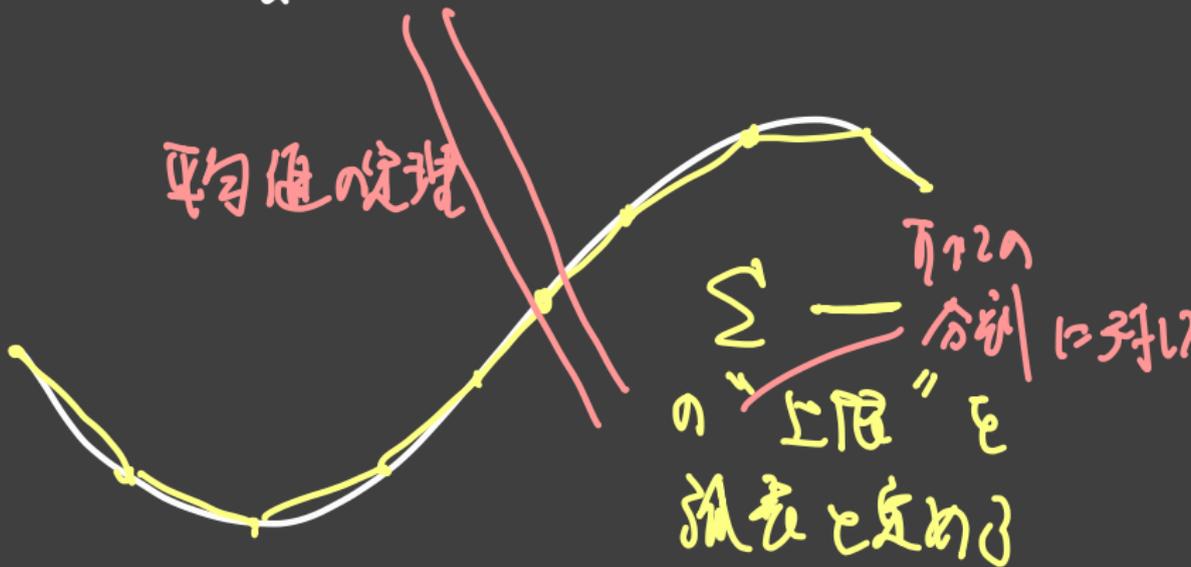
$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad a \leq t \leq b$$
$$L_\gamma = \gamma \text{ の弧長} = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$
$$\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} dt$$

おろろり = ぽろろり × びかん

弧長の公式

$\gamma: C^1$ -級

•  $\int_a^b \underline{\gamma(t)} dt$  を弧長の定義とする



# Q and A

Q: 高校で定積分の定義を

間違いから正しい

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

であると習ったのですが、この定義で間違いはあるでしょうか。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x: \text{有理数} \\ 0 & x: \text{無理数} \end{cases}$$

積分不能です。

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\textcircled{1} \int_a^1 f(x) dx = 1 \quad ?$$

## Q and A

- ▶ 補題 5.5 を定義から直接導くことができる，と講義ノートにありますが，どうやって導くかを知りたいというご質問がありました．アウトラインですがやってみます．

## Q and A

Q: 積分の定義が高校での定義から変わりましたが、なぜ高校では大学と違う定義が教えられているのでしょうか？ 文科省の陰謀でしょうか。

A: 大学で教えられている定義をしても、たとえば講義ノート5の定理5.9のような基本的な証明をするにもまだ道具が足りない（ので、ここでは証明をつけていない）。そういうところを詰めるより、まず、積分の意味と使い方を多くの人に知ってもらいたい、多くの人を知るべきである、というのが高等学校のカリキュラムであると考えます。

Q: 微分可能の定義はきちんと定義されていたのに、積分可能の定義はあいまいなのですか？

A: 実は微分可能の定義もあいまい。

極限の定義  
をこなしている

## Q and A

Q: 講義ノートの積分可能性にててくる  $\underline{S}_\Delta(f)$  について,

$$\underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^n \underbrace{f_{x_j}}_{\text{より隣合う区間どう}} \Delta x_j, \quad \Delta x_j := x_j - x_{j-1}$$

しで  $x_j$  が重なっていることで  $\underline{S}_\Delta(f)$  が実際の値より大きくなることはないのでしょうか.

A: 「実際の値」とは何でしょうか重なるの「幅」はゼロなので、全体としては影響しません.

Q: 講義資料の例 5-3 (原文ママ: 講義ノートのことか) で与えられた関数 (略) について  $0 < x_{k-1} - x_k < |\Delta|$  (原文ママ: 引き算の順番が逆では?) だからというところがよくわかりません.

A: この式がわからないのでしょうか, それともこの式から, すぐあとに書かれていることが結論付けられる, ということがわからないのでしょうか.

## Q and A

Q:  $e^{x^2}$  のように原始関数をインテグラルを用いないと表すことができない関数の定積分は人の手で求めることはできないのか。

A: 何がわかれば求まったことになるのか。

$$\int_0^x e^{-t^2} dt$$

やがて  $\psi$  が  $\ln \Gamma$  になる!