# 微分積分学第一 (LAS.M101-06)

## 重積分の変数変換

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/16

# Q and A

$\int dx \int f(x,y)\,dy$

順序

$\iint f(x,y)\,dx\,dy \sim \sum f(x,y)\,\Delta x\,\Delta y$

Q: 重積分の定義にでてくる分割は 2 つの区間 $[a, b]$, $[c, d]$ で考えていますが，一変数の積分のように大小が逆向きで分割することはあるのでしょうか？

現時点では考えない

(平面や空間の向きづけ)

Q: 累次積分と多重積分の違いは何ですか.

1変数の積分の組合わせ

Q: 重積分の累次積分でも一変数の積分と同様に置換積分をしても良いですか.

もちろんOK

Q: 累次積分は，やっていることは偏積分の組み合わせなのになぜ $\int \partial x$ とは表さないのでしょうか.

A: なるほど，そうですね．もし偏微分記号を使うとすると

$$\int_a^b dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\partial x$$

などという書き分けが必要な気がしますね.

# Q and A

- Q: 多変数関数で原始関数が存存（原文ママ：存在のことか）するものの例はありますか？
- Q: なぜ重積分には不定積分が存在しないのですか.
- Q: 重積分に原始関数が一般には存在しないとおっしゃっていましたが，一般にということは，存在するものもあるということですか？ もし私たちになじみのあるもので存在すｒのであればしりたいです.（調べても（山田注：ここで終わっている）

$f(x,y)$ の原始関数？

$f(x)$ の 〃 : $F'(x)=f(x)$ となる $F$

$f(x,y)$ の不定積分？

$f(x)$ の 〃 : $\int_{\bullet}^{x} f(t)\,dt$

# 復習：置換積分法の公式

$x = \varphi(u)$

$f$: $[a, b]$ で定義された連続関数
$\varphi$: $[\alpha, \beta]$ を含む開区間で定義された単調増加 $C^1$-級関数.
$a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

## 定理 (定理 6.5)

$x = \varphi(u)$

$$\int_a^b f(x)\,\boxed{dx} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\boxed{\varphi'(u)\,du}$$

$$\int_0^x \frac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}\,dt = \int_0^{\sinh x} \frac{du}{1+u^2} \qquad u = \sinh t$$

$x = \varphi(u)$

$$\Delta u = (u + \Delta u) - u$$

$$\Delta x = \varphi(u + \Delta u) - \varphi(u)$$

$$\doteq \varphi'(u) \Delta u$$

# 線形変換と面積

線形変換：

線形 変換

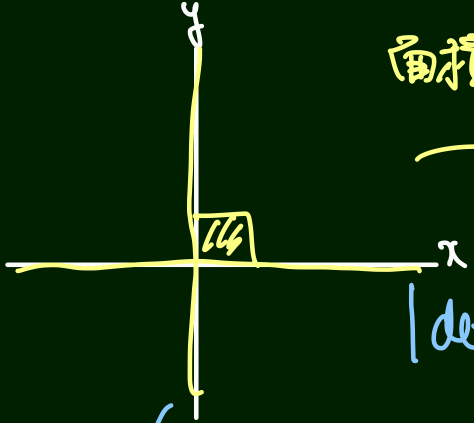
$$L_A \colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{X} = A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad (A \text{ は 2 次の正方行列})$$

## 補題 (補題 6.11, 6.13)

- $L_A$ によって，$\mathbb{R}^2$ の平行四辺形とその内部は $\mathbb{R}^2$ の平行四辺形とその内部，または線分に移る．
- $L_A$ によって平行四辺形 $D$ が平行四辺形 $D'$ に移るとき，

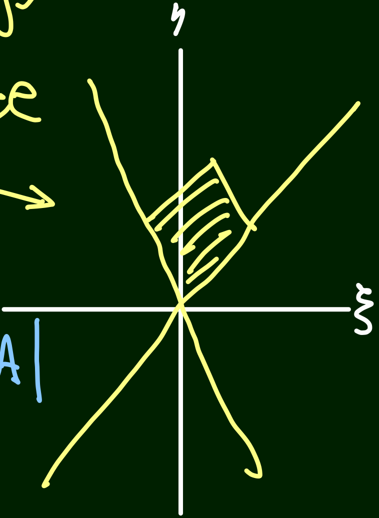
$$|D'| = |\det A|\,|D|.$$

$$X = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ax$$




面積比

$|\det A|$




$(\det(-5) = -5)$