微分積分学第一 (LAS.M101-06)

重積分の変数変換

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/16

C^1-級の変数変換

$$F\colon \mathbb{R}^2 \supset (u,v) \longmapsto F(u,v) = {}^t\big(x(u,v), y(u,v)\big) \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow$

$$F(a+h,b+k) = \begin{pmatrix} x(a+h,b+k) \\ y(a+h,b+k) \end{pmatrix}$$

d.

$$= F(a,b) + \begin{pmatrix} x_u(a,b) & x_v(a,b) \\ y_u(a,b) & y_v(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$$

$$|\varepsilon(h,k)| \to 0 \qquad \big((h,k) \to (0,0)\big)$$

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + h f_x(a,b) + k f_y(a,b)$$

$$+ \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k) \to 0$$

$(h,k) \to (0,0)$

変数変換の線形近似

$F(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$: C^1-級の変数変換

(h,k) が十分小さいときは，次の近似式が成り立つ：

$$F(a+h, b+k) - F(a,b) \doteqdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_u(a,b) & x_v(a,b) \\ y_u(a,b) & y_v(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}_{=\ 線形変換}$$

+ 小

“面積比”

$$\left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right|$$

$(u, v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$

Jacobi 行列 $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$

Jacobi 行列の行列式　Jacobi 行列式

Jacobian

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = x_u y_v - x_v y_u$$

(記号)

微小平行四辺形の面積比

$F(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$：変数変換

事実 (事実 6.14)

十分小さい Δu, Δv に対して，uv-平面上の，点

$$(a,b), \quad (a+\Delta u, b), \quad (a, b+\Delta v), \qquad (a+\Delta u, b+\Delta v)$$

を頂点とする長方形 D を F で写した像は,

$$\begin{aligned}
&\big(x(a,b), y(a,b)\big),\\
&\big(x(a,b)+x_u(a,b)\Delta u, y(a,b)+y_u(a,b)\Delta u\big),\\
&\big(x(a,b)+x_v(a,b)\Delta v, y(a,b)+y_v(a,b)\Delta v\big),\\
&\big(x(a,b)+x_u(a,b)\Delta u+x_v(a,b)\Delta v, y(a,b)+y_u(a,b)\Delta u+y_v(a,b)\Delta v\big)
\end{aligned}$$

を頂点とする平行四辺形に十分に近い.

微小平行四辺形の面積比

事実 (事実 6.14（続き）)

長方形を D を F で写した像 D' の面積は

$$|D'| \doteqdot |x_u(a,b)y_v(a,b) - x_v(a,b)y_u(a,b)|\,|D| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v$$

例

変数変換 $F(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$= (x, y)$

$r > 0$

$-\pi < \theta < \pi$

$$\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$$

重積分の変数変換

$F:(u,v)\mapsto \bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)$: C^1-級変数変換

定理 (重積分の変数変換)

F によって uv 平面上の面積確定集合 E が xy 平面上の面積確定集合 D と 1 対 1 に対応している
$\Rightarrow$
D 上の連続関数 f に対して

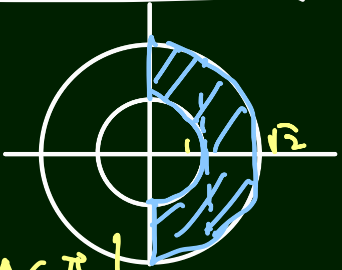
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

例

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} \qquad D := \{(x,y)\,|\,1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2, x \geqq 0\}$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$



$$E = \left\{(r,\theta)\,;\, 1 \leqq r \leqq \sqrt{2},\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \iint_E \frac{1}{1+r^2}\, r \, dr\, d\theta \quad *$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$E = \{1 \le r \le \sqrt{2},\ -\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}\}$$
$$= [1, \sqrt{2}] \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$* = \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{1+r^2}\, d\theta$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r}{1+r^2}\,\pi\, dr = \left[\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{3}{2}$$

課題

- 今回の課題はありません.