微分積分学第一 (LAS.M101-06)

重積分の変数変換

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/16

2 変数の変数変換

C^1-級の変数変換

$$F\colon \mathbb{R}^2 \supset (u,v) \longmapsto F(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &F(a+h, b+k) \\ &\quad = F(a,b) + \begin{pmatrix} x_u(a,b) & x_v(a,b) \\ y_u(a,b) & y_v(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2}\,\boldsymbol{\varepsilon}(h,k) \\ &\qquad\qquad\qquad |\boldsymbol{\varepsilon}(h,k)| \to 0 \qquad \big((h,k) \to (0,0)\big) \end{aligned}$$

変数変換の線形近似

$F(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$：$C^1$-級の変数変換

(h,k) が十分小さいときは，次の近似式が成り立つ：

$$F(a+h, b+k) - F(a,b) \fallingdotseq \begin{pmatrix} x_u(a,b) & x_v(a,b) \\ y_u(a,b) & y_v(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

微小平行四辺形の面積比

$F(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$：変数変換

事実 (事実 6.14)

十分小さい Δu, Δv に対して，uv-平面上の，点

$$(a,b), \quad (a+\Delta u, b), \quad (a, b+\Delta v), \qquad (a+\Delta u, b+\Delta v)$$

を頂点とする長方形 D を F で写した像は,

$$\begin{aligned}
&\bigl(x(a,b), y(a,b)\bigr), \\
&\bigl(x(a,b) + x_u(a,b)\Delta u, y(a,b) + y_u(a,b)\Delta u\bigr), \\
&\bigl(x(a,b) + x_v(a,b)\Delta v, y(a,b) + y_v(a,b)\Delta v\bigr), \\
&\bigl(x(a,b) + x_u(a,b)\Delta u + x_v(a,b)\Delta v, y(a,b) + y_u(a,b)\Delta u + y_v(a,b)\Delta v\bigr)
\end{aligned}$$

を頂点とする平行四辺形に十分に近い.

微小平行四辺形の面積比

事実 (事実 6.14（続き）)

長方形を D を F で写した像 D' の面積は

$$|D'| \doteqdot |x_u(a,b)y_v(a,b) - x_v(a,b)y_u(a,b)|\,|D| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v$$

例

変数変換 $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

重積分の変数変換

$F : (u,v) \mapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big)$: C^1-級変数変換

定理 (重積分の変数変換)

F によって uv 平面上の面積確定集合 E が xy 平面上の面積確定集合 D と 1 対 1 に対応している

$\Rightarrow$

D 上の連続関数 f に対して

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

例

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} \qquad D := \{(x,y) \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2, x \geqq 0\}$$

課題

- 今回の課題はありません.