

2024年7月16日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 (LAS.M101-06) 講義資料 11

■重要なお知らせ

- すでに予告しましたとおり、次回7月18日は中間試験を行います。お忘れなきよう。

■お知らせ

- 今回は期限までに85名の方から課題の提出がありました。T2SCOLAからフィードバックを行っていただきます。なお、用紙に記入されているコメントは山田用のメモです。読めない字があるかもしれませんが、この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください。

■前回の補足

- 講義ノート53ページの2行目の等式の行間を埋めてくださった方がいらっしゃいました。

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \frac{1}{|h|} |F(x+h) - F(x) - hf(x)| = \frac{1}{|h|} \left| \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt - \int_x^{x+h} f(x) dt \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt - \int_x^{x+h} f(x) dt \right|. \end{aligned}$$

これで結構です。最後の積分の積分変数は t なので $f(x)$ は定数、というところに注意です。

- 上の式の少し前で、「 $x+h$ が区間 $[a, b]$ のなかに入るように h をとる」としているが $x=b$ の場合はどうか、という質問がありました。そのときは h は負の値しかとれませんね。
- 補題5.5を定義から直接導くことができる、と講義ノートにあります。どうやって導くかを知りたいというご質問がありました。アウトラインですがやってみます。
- 20240711 映写資料 C の2ページ： $\int_a^b \rho(x) dx \Rightarrow \int_a^b \sigma(x) dx$ というご指摘を複数いただきました。修正ありがとうございます。これは講義の際に黒板 C にて修正したものです。

■前回までの訂正

- 20240711 映写資料 C の3ページ：線密度 $\mu(x, y) \Rightarrow$ 面密度 $\mu(x, y)$

■授業に関する御意見

- 「微小な y はゴミの日に捨てる」が面白かった 山田のコメント どうも
- やっと積分が出てきたので高校の積分をおさらいしようと思いました 山田のコメント 適切に
- 最近めちゃくちゃ暑いですね... 山田のコメント ねえ
- 講義で例題を解く時間があつたのはありがたかったです。習ったことをすぐにアウトプットできたので問題の解き方がすんなり理解できました 山田のコメント はい
- 難しかった 山田のコメント よかった
- 満足している 山田のコメント So?
- なし 山田のコメント me, too

質問と回答

質問 1: 7月4日の講義資料に「答えは7/23までに返却する」といった内容が書かれているが、中間試験の持ち込み用紙は返却されないのか。

お答え: たぶん返却すると思うが、期末試験には流用できない。

質問 2: 中間試験についてなのですが、持ち込み用紙の空いているスペースを計算用紙の代わりにしても良いでしょうか？

お答え： もちろん

質問 3： 9日の講義で挙げられた Lemniscate は特異点が $(0, 0)$ にありました。一般に特異点はグラフの線（原文ママ：曲線のことか？）が交わる点ですか？

お答え： いいえ、さまざまな形になります。

質問 4： 弧長が積分を使って求められるのはなぜですか。高校範囲ですが、ずっと不思議でした。

お答え： 「弧長」をどう定義しますか？

質問 5： xyz 空間であらわされる関数の曲線の長さ（原文ママ：関数の曲線とは？ xyz 空間であらわされるとは？）はどのようにして求められるんですか？

お答え： 速さの時間に関する積分。

質問 6： 高校で定積分の定義を

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

であると習ったのですが、この定義で間違いはあるのでしょうか。

お答え： ちょっとまずい。 f が連続の場合は大丈夫だが、等分に分割するだけではうまく行かないことがある。たとえば Dirichlet の関数（例 5.2）の積分はゼロになってしまう。

質問 7： 積分の定義が高校での定義から変わりましたが、なぜ高校では大学と違う定義が教えられているのでしょうか？文科省の陰謀でしょうか。

お答え： 大学で教えられている定義をしても、たとえば講義ノート 5 の定理 5.9 のような基本的な証明をするにもまだ道具が足りない（ので、ここでは証明をつけていない）。そういうところを詰めるより、まず、積分の意味と使い方方を多くの人に知ってもらいたい、多くの人を知るべきである、というのが高等学校のカリキュラムであると考えます。

質問 8： 講義ノートの積分可能性にてでくる $\underline{S}_\Delta(f)$ について、 $\underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^n f_j \Delta x_j$, $\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$ より隣合う区間どうして x_j が重なっていることで $\underline{S}_\Delta(f)$ が実際の値より大きくなることはないのでしょうか。

お答え： 「実際の値」とは何でしょうか重なるの「幅」はゼロなので、全体としては影響しません。

質問 9： 講義資料の例 5-3（原文ママ：講義ノートのことか）で与えられた関数（略）について $0 < x_{k-1} - x_k < |\Delta|$ （原文ママ：引き算の順番が逆では？）だからというところがよくわかりません。

お答え： この式がわからないのでしょうか、それともこの式から、すぐあとに書かれていることが結論付けられる、ということがわからないのでしょうか。

質問 10： e^{x^2} のように原始関数をインテグラルを用いないと表すことができない関数の定積分は人の手で求めることはできないのか。

お答え： 何がわかれば求まったことになるのか。

質問 11： 微分可能の定義はきちんと定義されていたのに、積分可能の定義はあいまいなのですか？

お答え： 実は微分可能の定義もあいまい。

質問 12： 累次積分は、やっていることは偏積分の組み合わせなのになぜ $\int \partial x$ とは表さないのでしょうか。

お答え： なるほど、そうですね。もし偏微分記号を使うとすると

$$\int_a^b dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) \partial x$$

などという書き分けが必要な気がしますね。

質問 13： 累次積分と多重積分の違いは何ですか。

お答え： 多重積分は「関数の値」と「微小面積」の積の総和（の極限）。累次積分は多重積分を一変数関数の積分の繰り返しによる表示。

質問 14： 重積分の定義にてでくる分割は 2 つの区間 $[a, b]$, $[c, d]$ で考えていますが、一変数の積分のように大小が逆向きで分割することはあるのでしょうか？

お答え： いいえ。一変数の場合との違いとして重要です。

質問 15： 直感的に閉集合は面積確定しそうですが、しない例はあるのですか。

お答え： はい、ちょっと複雑ですのでここでは説明しません。講義ノート 55 ページの下から 4 行目の式で表されるようなコンパクト集合は、すくなくとも f_1, \dots, f_n が C^1 -級なら面積確定。

質問 16: 7/11 のスライド C の最後の問題で, x や y が空でないための条件 ($1 - y^2 - z^4 \geq 0$ や $1 - z^4 \geq 0$) から導かれる条件 ($\sqrt{1 - z^4} \geq y \geq 0$ や $1 \geq z \geq 0$) をそのまま積分範囲として使えるのはなぜですか.

お答え: 実際それが y や z の動く範囲になる.

質問 17: 重積分の累次積分でも一変数の積分と同様に置換積分をしても良いですか.

お答え: 累次積分のひとつひとつは一変数関数の積分なので, そこで使えるものはなんでも使える.

質問 18: 多変数関数で原始関数が存在 (原文ママ: 存在のことか) するものの例はありますか?

お答え: どういう性質ものものを原始関数と思いたいですか?

質問 19: なぜ重積分には不定積分が存在しないのですか.

お答え: 不定積分ってどんなものだと思いますか?

質問 20: 重積分に原始関数が一般には存在しないとおっしゃっていましたが, 一般にということは, 存在するものもあるということですか? もし私たちになじみのあるもので存在するものであれば幸いです. (調べても (山田注: ここで終わっている))

お答え: 原始関数とはどんなものだと思いますか?

質問 21: コンパクト集合上の積分の注意点はありますか.

お答え: いろいろ計算してみただけで, 気づきませんでしたか.

質問 22: 2 変数関数の重積分では, 微小な長方形に領域を分割し, 3 変数関数の重積分では, 微小な直方体に領域を分割すると講義中に話されていましたが, 4 変数以上の関数の重積分では領域をどのように分割するのですか.

お答え: 次元の数だけの区間の直積

質問 23: 重積分は, ある平面 $z = f(x, y)$ と xy 平面に囲まれた部分の体積を求めるときに, 微小な長方形の密度を $f(x, y)$ として, 計算していることと同義ですか? (高さという概念を密度に変換しているように感じられます)

お答え: はい

質問 24: この講義では重積分は累次積分にして計算することは, 何も言わなくていいのですか.

お答え: 言うとしたら何をいう?

質問 25: リウヴィルの定理が書かれている日本語の本を教えてください.

お答え: 一松信 初等関数の数値計算, 教育出版. 1974 /

質問 26: 二重積分では x または y を固定して計算するとありますが, どちらを先に固定するかで計算の煩雑さが変わると教わりました. どちらを先に固定するかを見分ける方法はあるですか. それとも一度手を動かすしかないのでしょうか. $\int_0^x \operatorname{sech} u du$ が 2 通りで表せるとおっしゃっていましたが, この 2 つの値が等しいことを示す方法を知りたいです.

お答え: 手を動かす / $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$ と \tan の 2 倍角の公式を使う

質問 27: $\int_a^b [\int_c^d f(x, y) dy] dx = \int_c^d [\int_a^b f(x, y) dx] dy$ が成り立つのはどうしてですか.

お答え: 縦の短冊で先に和をとっても, 横の短冊で先に和をとっても総和は同じ

質問 28: 楕円の楕とはどのような意味なのでしょう.

お答え: “楕” 一文字で長円の意味があるようです

質問 29: 陰関数定理に対してまたよくわからない. その定理は一体何を言いたい. どのような問題に応用できるか.

お答え: 前回の説明のどこがわからなかった?

質問 30: 幅が 0 に近づくような区間の分割は一位に定まりませんが, 積分可能性はこのような任意の分割である性質が成り立つ必要があるのか, あるいは特定の分割で成り立てばよいのか, このどちらが定義ですか.

お答え: “どんな分割に対しても” です

質問 31: 多変数関数の積分にも 1 変数関数のときのような公式は存在するのですか

お答え: 具体的には 1 変数関数のどんな公式?

質問 32: 3 変数関数の 3 重積分って何を求めているんですか

お答え: 積分の値

質問 33: 講義ノート P.49 で $\bar{S}_\Delta(f)$ を $S_\Delta(f)$ の最大値, $\underline{S}_\Delta(f)$ を $S_\Delta(f)$ の最小値としていますが, 上下の線を入れることで最大値・最小値を表す書き方は数学的にどのように表すのか. それともこの講義内でのみ使用するのか教えてください. (教科書では最大値は大文字の S , 最小値は小文字の s を用いていました)

お答え: 講義では $\bar{S}_\Delta(f)$ は使っていないですね. 記号の使い方はあまり一般的でない

質問 34: 7/9 黒板 B, 5 ページについてです. 分割の幅を $|x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \dots, |x_N - x_{N-1}|$ の最大値で定める理由がわかりません.

お答え： 最小値が 0 に近づいても分割は小さくなるとは限らない

質問 35： 高校で断面積を 1 つの変数で表してから体積を求めたが、分割した面積を加えていく考え方は重積分の根本的な考え方と同じと考えられるのか。

お答え： 累次積分の考え方と本質的には同じですね。

質問 36： ヤコビ行列の合成関数に関する質問です。 $d(G \circ F) = dGdF$ が成り立つ理由がわかりません

お答え： $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), G(u, v) = (\xi(u, v), \eta(u, v))$ とすると $G \circ F(x, y) = (\xi(u(x, y), v(x, y)), \eta(u(x, y), v(x, y)))$ これに chain rule を適用する

質問 37： 中間試験用のメモ用紙は T2Schola 上で配布されますか？？ 書き損じてしまいまして、T2Schola 上のどこにあるかわかりません

お答え： 中間試験のセクション

質問 38： $I = [a, b] \times [c, d]$ の \times は外積の \times と同じ意味ですか？

お答え： いいえ。講義ノート 55 ページ

質問 39： 面積確定集合で $f(x, y) = 1$ が積分可能とあるが、1 のところが変数だと D は成り立たないのですか？

お答え： 「 D がなりたつ」とは何でしょう

質問 40： 不連続点を持つ区間 I で定義された関数 f が I で積分可能なことはあるのか。またもし積分可能ならば f はどのような条件を満たしているのか

お答え： たとえば講義ノート 例 5.3 有限個の点を除いて連続ならば積分可能

質問 41： 重積分の計算の途中式に関して質問です。先生は講義で $\iint_D f(x, y) dx dy$ について $\int dy g(y) \int h(x, y) dx$ や $\int g(y) dy \int h(x, y) dx$ のように統一した書き方をされていませんでしたが、どちらでも自分が理解できれば良いものですか？

お答え： この 3 つの定義は全て違って同じ値になる、ということを理解していればよいです

質問 42： 講義ノート 5 に $\bigcup_{j=1, \dots, m, h=1, \dots, n} \Delta_{jk}$ と出てきますが、この U はどういう意味ですか。

お答え： 合併集合。ここでは $\Delta_{11} \cup \Delta_{12} \cup \dots \cup \Delta_{mn}$ のこと。

質問 43： $|\Delta| = \max\{|x_j - x_{j-1}|, |y_k - y_{k-1}| : j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n\}$ の意味がよくわかりませんでした。教えてください。

お答え： $|x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \dots, |x_m - x_{m-1}|, |y_1 - y_0|, |y_2 - y_1|, \dots, |y_m - y_{m-1}|$ という mn 個の数のうち一番大きいもの

質問 44： 積分の際に不連続関数を積分するのは可能ですか？

お答え： 講義ノート 例 5.2, 5.3

質問 45： $\int dx \int dy$ と $\int dy \int dx$ は $f(x, y)$ がどんな関数でも常に成り立ちますか？

お答え： 積分可能なら大丈夫

質問 46： \mathbf{R}^2 の部分集合 D が有界であるとは、十分大きい長方形 I をとれば $D \subset I$ となることであると、講義ノート 5 の 7 ページにあります。このとき取る図形は円などの他の図形でもいいのですか

お答え： もちろん。円はある長方形に含まれますし長方形はある円に含まれます

質問 47： ガウス積分のように不定積分が初等関数で表せないが、定積分は求まる関数があることに興味を持ちました。どのような関数の不定積分を初等関数で表すことを諦めて計算した場合、手計算できるのか気になりました。

お答え： 定積分が「求まる」のではなく「存在する」ですね

質問 48： 7/9 の黒板 C のいろいろな質量を求める問題で、面密度が一定であるだったり、棒が関数で表されるなどといった仮定が非現実的だと思いました。この質量の求め方は本当に使われているのですか。

お答え： 「棒が関数」という文言だったら非現実ですね。そんなこといいましたっけ線密度が一定でない棒の話をしていたので？

質問 49： 高校生の頃から疑問に思っていたのですが、7/11 の講義で k がものすごく小さい値なら k^2 は近似で 0 にできると言っていました。そこで、 k がものすごく小さいなら k も 0 に近似することはできないのですか？

お答え： 問題によります。11 日の講義の文脈では「 k^2 は k に比べて十分小さい」

質問 50： 重積分と累次積分の値は常に一致しますか

お答え： 命題 5.19 のような状況なら一致する

質問 51： 20240709 映写資料 C の 2 ページ目について $M = \int_a^b \rho(x) dx$ の $\rho(x)$ はどこで定義されたものでしょうか。

お答え： 黒板で訂正しませんでしたっけ

質問 52： 面積確定集合における面積確定とは何のことですか？

お答え： それをそこで定義している

質問 53： 累次積分の順番を変えていいというのは中間テストで示さなくても使っていいですか？

お答え： 知っている定理は示す必要はない。証明が必要なものは explicit にそう書く

質問 54： 初等関数以外の関数の総称はありますか？

お答え： 初等関数以外の関数

質問 55： 授業では定積分の重積分しか出てきませんでしたが、1変数関数のように不定積分は定義できるのですか？

お答え： 20240711 黒板 B 3 ページ

質問 56： 空間のコンパクト集合 D の形の立体の点 $(x, y, z) \in D$ における密度が $\rho(x, y, z)(\text{kg}/\text{m}^3)$ ならば、立体の質量は $\iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz \text{kg}$ とありますが、求める値は体積 V としたとき $\int_D \rho dV$ と書けますか？

お答え： 体積要素 dV ではないでしょうか？

質問 57： 7/11 映写資料 B の 4 ページで行っていた「まともな性質を持っていたら成り立つ」のまともな性質とはどのような性質ですか。

お答え： 当該の言及が見当たりません

質問 58： 積分は区分求積法により定義され、今回の話で誤差関数という原始関数と e^{-t^2} の積分について、原始関数によって積分が定義されるのではなく、積分によって原始関数が求められる例だと話がありました。そこで「積分可能性」という言葉が出てきたと思うのですが、その言葉の説明をもう少しと、試験問題に出る可能性、その際の出し方、その解き方し方を教えていただきたいです。

お答え： 講義ノート 定義 5.1 定理 5.9

質問 59： コンパクト集合はなぜ「コンパクト」の名前がついているのですか？

お答え： “小さい” という漢字がするらしい (位相空間論的に)

質問 60： 重積分や累次積分を視覚的にイメージするおすすめの方法があれば教えてほしいです。高校までの積分はとてもし細い長方形が無数にあるとか、回転体なら薄い板が重なっているというイメージを持ってました。

お答え： 積分はいつも回転体しか考えなかった？

質問 61： 講義ノートの例 5.3 において、不連続関数が積分可能であるとしています。区間 $[0, 3]$ で定義された関数 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ は不連続ですが $|\Delta| \rightarrow 0$ のとき、 $\bar{S}_\Delta(f)$ および $\underline{S}_\Delta(f)$ は 3 に収束します。一方、 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ は $x = 1, 2$ において微分可能ではありません。とすると、一般に「関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で微分可能なら原始関数 $F(x)$ が区間 $[a, b]$ で微分可能」は偽ですか？

お答え： 偽です

質問 62： 7/11 の映写資料 B で説明された重積分の別の表記方法について、 x, y についての式を \int と dx, dy の外に置くのが紛らわしく感じます。ただの積分係数 1 の積分と明確に見分けられる方法はありますか？

お答え： 例えば dy の右側が y の関数なら積分する

質問 63： 重積分がコンパクト部分集合に対して定義されていましたが、閉集合でなくてはならないのはなぜでしょうか。高校までののりでは協会の有無は微小で気にする必要がないと考えていたと思います。

お答え： 境界近くでは関数が発散したりする可能性があります。

質問 64： ガウスの誤差積分についての話を授業で触れた際、「この式の右辺の積分は初等関数ではなく、どうやって証明するかは非自明である」とおっしゃられていましたが、これは決まった証明方法が 1 つではなく複数あるから非自明であるということですか？ それとも証明方法がわからないから非自明であるということですか？

お答え： かんたん証明できないということですか？

質問 65： 講義ノート p.55 に「この分割の 2 つが異なる長方形は \sim を持たない」とあるが、境界が共通部分になるのはなぜですか？

お答え： たとえば $[a, b] = [0, 1], [c, d] = [0, 1], x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 (m = 2), y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 1, (n = 2)$ としてこの分割を絵に描いてみよ。

質問 66： 講義ノート p.49 に記載されている $\overline{f_j}, \underline{f_j}$ は定義を書かなくとも数学的に使えるものですか。それとも先生の講義の中でしか使わないものですか。

お答え： 後者

質問 67： 2Q では講義積分までが授業内容となっていますが、3Q 以降に数学の授業を受講するとどんな積分を学習しますか。

お答え： 第 2 ではあまり積分しない。項別積分定理はやるかも

質問 68： 7月11日映写資料 A, p.4 楕円の弧長の説明で $t = \frac{\pi}{2} - u$ と置換して $2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} du$ となったあ

とで、 $4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt$ と u が t に戻っていたと思うのですが、これは何が起こって t に戻っているのですか

お答え： u を t で書き換えた。高等学校の教科書にあった $\int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt$ という「公式」。

質問 69： 面積確定集合は累次積分を定義するためにあるものであり、そこから $D \in \mathbf{R}^n$ に多重積分に一般されていくが、これらを次元としてみれば、1次元、2次元、 n 次元であり、0次元とみなせるのは面積確定集合から「1」という数そのものということか？ (いわゆる積分での“点”と捉えられるのは数自身であるか？)

お答え： ちょっと言葉足らずかもしれませんがだいたいそう

質問 70： 積分を正しく証明することが講義ではできないと言っていたが、どのような理論を学べば正しい証明ができるようになりますか

お答え： 「積分を証明する」とはどういうことですか

質問 71： 重積分はどのように応用されますか

お答え： 物理や工学で見て下さい

質問 72： 重積分の定義がぼやっとして、ごまかせるようなことをおっしゃっていましたが、それははっきりとした定義があるが難しく説明できないということなのでしょう、それともまだ適当な定義が見つかっていないということなのでしょうか？

お答え： 前者。まだこの段階では言葉の準備が足りない

質問 73： 楕円関数において第一種から第三種であると言っていましたが、それらの違いはなんですか？

お答え： 調べてご覧

質問 74： なぜ $\operatorname{sech} x$ の原始関数が積分方法によって異なる結果が得られるのか。また得た2つの原始関数の差の式は微積分を使わずに0の結果が得られるか。

お答え： 方法によって結果の表示が変わるのはよくあること。後半は“はい”。ヒントは講義中に出した

質問 75： 有界閉集合がコンパクトになるとありますが、有界でない閉集合というものはどうものがあるのでしょうか。

お答え： たとえば $\{(x, y); x \geq 0\}$ 。講義で挙げた例です。

質問 76： 7/11の映写資料Aで楕円の弧長を求めるスライドの一つ前のスライドが抜けていると思います。

お答え： 一応、図版の関係で外しました。

質問 77： 機体（原文ママ：気体？）の状態方程式に絡めた例によって腑に落ちた、具体例が大事だと感じた。

お答え： で質問は？