微分積分学第一 中間試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読み, 理解できるように書いてください.
- 裏面は下書き, 計算などに使用できますが, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は, **解答用紙**と**持込用紙**を回収します. **持込用紙には学籍番号と氏名を記してください**. 問題用紙は持ち帰ってください.
- 答案は 7 月 23 日に返却します. その際に定期試験の予告および持ち込み用紙を配布します.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 2024 年 7 月 30 日までに電子メイルで山田までご連絡ください. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. ご了承下さい.

指定用紙のみ持込可

問題 A 文中の $\boxed{\ 1\ }$～$\boxed{\ 20\ }$ に最もよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい. [35 点]

uv 平面全体で定義された写像

$$F(u,v)=\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)=(e^u\operatorname{sech}v, e^u\tanh v) \tag{1}$$

は, $\mathbb{R}^2$ から $D:=\{(x,y)\,;\,x>0\}$ への 1 対 1 の対応を与える. したがって, 逆写像

$$F^{-1}(x,y)=\bigl(u(x,y),v(x,y)\bigr)\qquad (x,y)\in D \tag{2}$$

が存在する. 写像 F のヤコビ行列（微分）は

$$\begin{pmatrix}\boxed{\ 1\ } & \boxed{\ 2\ }\\ \boxed{\ 3\ } & \boxed{\ 4\ }\end{pmatrix}$$

なので, F^{-1} のヤコビ行列を（x, y ではなく）u, v を用いて表すと

$$\begin{pmatrix}\boxed{\ 5\ } & \boxed{\ 6\ }\\ \boxed{\ 7\ } & \boxed{\ 8\ }\end{pmatrix}$$

となる.

いま, x, y の C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して, (1) を用いて

$$\tilde f(u,v):=f\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)$$

によって (u,v) の関数 $\tilde f$ を定義すると, チェイン・ルールにより

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\boxed{\ 9\ }\frac{\partial\tilde f}{\partial u}+\boxed{\ 10\ }\frac{\partial\tilde f}{\partial v},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\boxed{\ 11\ }\frac{\partial\tilde f}{\partial u}+\boxed{\ 12\ }\frac{\partial\tilde f}{\partial v} \tag{3}$$

が成り立つ*. この第一式の両辺をさらに x で偏微分すると,

$$f_{xx}=\boxed{\ 13\ }\tilde f_{uu}+\boxed{\ 14\ }\tilde f_{uv}+\boxed{\ 15\ }\tilde f_{vv}+\boxed{\ 16\ }\tilde f_u+\boxed{\ 17\ }\tilde f_v$$

と書ける. 同様に $f_{yy}=\boxed{\ 18\ }$ となるので, $f_{xx}+f_{yy}=\boxed{\ 19\ }$ と, $\tilde f$ の u,v に関する偏導関数を用いて書き直すことができる.

ここで $G(0)=0$, $G'(0)=1$ を満たす C^2-級 1 変数関数 G と (2) の関数を用いて $g(x,y):=G\bigl(v(x,y)\bigr)$ と定める. この関数 g が調和関数である, すなわち $g_{xx}+g_{yy}=0$ を満たすためには $G(t)=\boxed{\ 20\ }$ でなければならない.

* $\boxed{\ 9\ }$–$\boxed{\ 17\ }$ には u, v の具体的な式を入れる.

問題 B 文中の $\boxed{\ 1\ }$～$\boxed{\ 13\ }$ に最もよく充てはまる数・式を入れなさい． [20 点]

重積分

$$I := \iint_D \frac{x}{1+x^2+2y^2}\,dx\,dy \qquad D = \left\{(x,y)\,|\,x^2+2y^2 \leqq 3, x \geqq 0, y \geqq 0\right\}$$

は，

$$I = \int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} dx \int_{\boxed{3}}^{\boxed{4}} \frac{x}{1+x^2+2y^2}\,dy = \int_{\boxed{5}}^{\boxed{6}} dy \int_{\boxed{7}}^{\boxed{8}} \frac{x}{1+x^2+2y^2}\,dx$$

と，ふた通りの累次積分で表すことができる．いま，変数変換

$$x = \sqrt{2}u\cos v, \qquad y = u\sin v$$

を考える．この変数変換のヤコビ行列式は $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \boxed{\ 9\ }$ だから，重積分の変数変換の公式により，

$$I = \iint_{\widetilde{D}} \boxed{\ 10\ }\,du\,dv \qquad \widetilde{D} = \left\{(u,v)\,|\,\boxed{\ 11\ }\right\}$$

が成り立つ[†]．とくに $I = \boxed{\ 12\ }$，I の整数部分は $\boxed{\ 13\ }$ である．

問題 C 文中の $\boxed{\ 1\ }$～$\boxed{\ 6\ }$ に最もよく充てはまる数・式を入れなさい． [15 点]

実数 u に対して $\sin 2\,\mathrm{Tan}^{-1} u = \boxed{\ 1\ }$，$\cos 2\,\mathrm{Tan}^{-1} u = \boxed{\ 2\ }$ と，u の有理式[‡]で表される．いま，1 変数関数 $\Phi(t) := 4\,\mathrm{Tan}^{-1} \exp t$ を考えると，その 2 階までの導関数は $\Phi'(t) = \boxed{\ 3\ }$，$\Phi''(t) = \boxed{\ 4\ }$ となるので，関数 $\varphi(x,y) := \Phi(2x+ay)$ (a は 0 でない定数) とおくと $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}(x,y) = \boxed{\ 5\ }$ となる．とくに φ が $\varphi_{xy} + \sin\varphi = 0$ を満たすための条件は $a = \boxed{\ 6\ }$ である．

問題 D 次は正しいか，理由をつけて答えなさい． [10 点]

(1) 0 を含む開区間 I で定義された 1 変数関数 f が 0 で連続ならば，f は 0 で微分可能である．

(2) 0 を含む開区間 I で定義された 1 変数関数 f が 0 で微分可能ならば，f は 0 で連続である．

問題 E [0 点] この授業に関するご意見，ご希望，ご誹謗，ご中傷などありましたらお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

定義・公式
• $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$，$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$, $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$
• $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$，$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
• $x = \mathrm{Tan}^{-1} y \Leftrightarrow y = \tan x$ かつ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

おつかれさまでした ♡

[†] $\boxed{\ 10\ }$: (u,v) の具体的な関数が入る；$\boxed{\ 11\ }$: (u,v) の具体的な条件が入る．

[‡] 多項式の商の形を有理式という．

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：各行 5 点．ただし 13–17 はまとめて 5 点, 19, 20 は各 5 点

1 $e^u \operatorname{sech} v$	2 $-e^u \operatorname{sech} v \tanh v$
3 $e^u \tanh v$	4 $e^u \operatorname{sech}^2 v$

5 $e^{-u} \operatorname{sech} v$	6 $e^{-u} \tanh v$
7 $-e^{-u} \sinh v$	8 e^{-u}

9 $e^{-u} \operatorname{sech} v$	10 $-e^{-u} \sinh v$	11 $e^{-u} \tanh v$	12 e^{-u}
13 $e^{-2u} \operatorname{sech}^2 v$	14 $-2e^{-2u} \tanh v$	15 $e^{-2u} \sinh^2 v$	

16 $e^{-2u}(\tanh^2 v - \operatorname{sech}^2 v)$

17 $e^{-2u}(\tanh v + \sinh v \cosh v)$

18
$$e^{-2u}\left(\tanh^2 v \frac{\partial^2 \tilde f}{\partial u^2} + 2\tanh v \frac{\partial^2 \tilde f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \tilde f}{\partial v^2} + (\operatorname{sech}^2 v - \tanh^2 v)\frac{\partial \tilde f}{\partial u} - \tanh v \frac{\partial \tilde f}{\partial v}\right)$$

19
$$e^{-2u}\left(\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial u^2} + \cosh^2 v \frac{\partial^2 \tilde f}{\partial v^2} + \sinh v \cosh v \frac{\partial \tilde f}{\partial v}\right)$$

20 $\operatorname{Tan}^{-1} \sinh t$

学籍番号			B					氏名	

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：各行 5 点

1 0	2 $\sqrt{3}$	3 0	4 $\sqrt{\dfrac{3-x^2}{2}}$
5 0	6 $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$	7 0	8 $\sqrt{3-2y^2}$
9 $\sqrt{2}u$	10 $\dfrac{2u^2\cos v}{1+2u^2}$	11 $0 \leqq u \leqq \sqrt{\dfrac{3}{2}}, 0 \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2}$	
12 $\dfrac{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}{\sqrt{2}}$	13 0		

問題 D

- 理由も合わせて 5 点．理由が間違っている，あるいは理由がないものは 0 点

学籍番号			B					氏名	

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：各行 5 点

1 $\dfrac{2u}{1+u^2}$	2 $\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$
3 $\dfrac{4e^t}{1+e^{2t}}$	4 $\dfrac{4e^t(1-e^{2t})}{(1+e^{2t})^2}$
5 $\dfrac{8ae^{2x+ay}(1-e^{2(2x+ay)})}{(1+e^{2(2x+ay)})^2}$	6 $-\dfrac{1}{2}$

問題 D の解答欄 配点：各 5 点

(1) [×]← 正しければ○，正しくなければ × を入れる

理由：

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ は実数全体で連続だが 0 で微分可能でない．

(2) [○]← 正しければ○，正しくなければ × を入れる

理由：

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(f(x)-f(0)+f(0)) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)x + \lim_{x\to 0} f(0)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)\lim_{x\to 0} x + f(0) = f'(0)\times 0 + f(0) = f(0)$$

学籍番号			B						氏名	

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 4〕

この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 E この授業に関するご意見，ご希望，ご誹謗，ご中傷などありましたらお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- ご自分の学籍番号の座席に着席してください．
- **座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 受験者が，筆記用具・持込用紙・必需品（時計不可）以外の物を鞄に入れ，机の下か足下に置かれていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- 解答用紙 4 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．5 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．
- 原則として**途中退室は認めません**．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上におき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号			B						氏名	