微分積分学第一 (LAS.M101-06)

広義積分

拡張された意味での

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/23

$x=0$で定義されない

広義積分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.$$

積分の定義：
閉区間で定義され
れた.

広義積分

存在 (ε > 0 のとき)

- $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$: 連続
  極限値 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} \boxed{\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx}$ が存在するとき,
  その値を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と書く.
- $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$: 連続
  極限値 $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\,dx$ が存在するとき,
  その値を $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ と書く.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

$$\int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_{\varepsilon}^{1} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 2$$

広義積分の例

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ $=2$ 収束

広義積分の例

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ ： 発散

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_\varepsilon^1 = -\log\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} +\infty$$

広義積分の例

- $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$ 収束

$$\int_0^M e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^M$$

$$= -e^{-M} + e^0$$

$$= 1 - e^{-M}$$

$$\xrightarrow[M\to\infty]{} 1$$

広義積分の例

- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ 発散.

$$\int_1^M \frac{dx}{x} = \left[\log x\right]_1^M = \log M \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$$

広義積分の例

$\alpha > 0$ なら広義積分でない

α：実数

- $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,dx$

$\alpha < 0$

$-1<\alpha<0$ の時 収束

$\alpha \leqq -1$ ： 発散

$\alpha \neq -1$

$$\int_\varepsilon^1 x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\left[x^{\alpha+1}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\left(1-\varepsilon^{\alpha+1}\right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1} & (-1<\alpha<0) \\ +\infty & (\alpha<-1) \end{cases}$$

$\alpha = -1$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ 前にやった。

広義積分の例

β：実数

- $\displaystyle\int_1^\infty x^\beta\,dx$

$\beta < 0$ $\begin{cases} \beta \geqq -1 & \text{のとき 発散} \\ \beta < -1 & \text{のとき 収束} \end{cases}$

$$\int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^M$$

$$= -\frac{1}{M} + 1 \longrightarrow 1$$

収束

広義積分の例

a：実数

- $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx$

収束(a>0)

たしかめてみよ.

$k \in (0,1)$

- $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$ 収束

$$\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$x = \sin t$

$dx = \cos t\,dt$

$$= \int_0^{\sin^{-1}(1-\varepsilon)} \underbrace{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}_{0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\text{ で連続}}\,dt.$$

$\sin^{-1}(1-\varepsilon) \to \frac{\pi}{2}$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt$$

・広義積分の収束判定

・$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

収束

重積分の変数変換公式