微分積分学第一 (LAS.M101-06)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/25

中間試験答案返却

前回答案を受け取っていない方：

- 最前列の机に答案があります．各自お持ちください．
- 答案に添付された「中間試験報告」は期末試験の際の持ち込み用紙となります．

10:55 開始

お時間のある方はこの間に

授業学修アンケート（T2SCHOLA）

にご回答ください．
7 月 24 日 14:00 の時点で回答数は 10/102 です．

7月30日(火) 試験期間中 休講
8月1日(木) 期末試験

期末試験予告

以下の要領で期末試験を実施します

日時： 2024年8月1日（木曜日）10時50分–12時20分
(10時45分までには指定の座席に着席してください)

場所： WL1-401講義室（この科目の講義・演習の会場）

試験範囲： 主として7月25日までの講義で扱った内容.

持ち込み： 中間試験返却答案に添付した中間試験報告の用紙を**持込用紙（A4版）**として持ち込み可．これ以外は持ち込み不可．持ち込み用紙は試験終了後回収する.

返却： 答案は本学の「夏季一斉休業」（8月9日～13日）以前にT2SCHOLA を通して返却する.

10日11日 作定

採点に関するクレイム等： 答案返却のアナウンスから1週間以内に電子メイルにて申し出ること.

計算用紙： 計算用紙は配布しない.

記号等： 原則として講義や問題で用いたもの.
それ以外のものを使うときは，その旨明記すること.

成績評価の方法

- 期末試験（8 月 1 日）の得点（80 点満点）と演習の得点（20 点満点）の和を評価の基本点とする.
- 合格者平均点を 80 点とするために，提出課題および中間試験の評価を用いて調整を行うことがある．課題の得点と中間試験の得点は同一ウェイトとする.
- 成績評価は，提出課題・中間試験答案・期末試験答案に記述されたもののみを材料とする.

補足：チェイン・ルールについて

問題 A

変数変換

$$F\colon (u,v) \longmapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big) = (e^u \operatorname{sech} v, e^u \tanh v)$$

を用いて，2 変数関数 $f(x,y)$ から定まる

$$\tilde{f}(u,v) := f\big(x(u,v), v(u,v)\big)$$

を考えるとき，

$$\Delta f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \qquad \left(\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

Laplacian

を $\tilde{f}$ の偏導関数で表しなさい．

補足：チェイン・ルールについて

$$F\colon (u,v) \mapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big) = (e^u \operatorname{sech} v, e^u \tanh v),$$

$x = e^u \operatorname{sech} v$

$\cancel{\dfrac{dx}{du}}$

$\dfrac{\partial x}{\partial u} = e^u \operatorname{sech} v$

$\dfrac{\partial x}{\partial v} = -e^u \operatorname{sech} v \tanh v$

$y = e^u \tanh v$

$\dfrac{\partial y}{\partial u} = e^u \tanh v$

$\dfrac{\partial y}{\partial v} = e^u \operatorname{sech}^2 v$

$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$

$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \times \tanh x$

$(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x$

$$\because \begin{cases} (\cosh x)' = \sinh x \\ (\sinh x)' = \cosh x \end{cases}$$

補足：チェイン・ルールについて

$x=$ $y=$

$$F\colon (u,v)\mapsto \bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)=(e^u\operatorname{sech}v, e^u\tanh v),$$

$$F^{-1}\colon (x,y)\mapsto \bigl(u(x,y),v(x,y)\bigr) \qquad \Bigl(u = \log\sqrt{x^2+y^2}$$

Fの微分

ヤコビ行列

$$dF=\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^u\operatorname{sech}v & -e^u\operatorname{sech}v\tanh v \\ e^u\tanh v & e^u\operatorname{sech}^2 v\end{pmatrix} \qquad \operatorname{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\tilde f}{\partial u} & \dfrac{\partial\tilde f}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v\end{pmatrix}}_{dF} \qquad (\operatorname{Sinh}^{-1})$$

chain rule

$(dF)^{-1}$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\tilde f}{\partial u} & \dfrac{\partial\tilde f}{\partial v}\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y\end{pmatrix}}_{dF^{-1}}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$$

$$dF^{-1}=(dF)^{-1}=\begin{pmatrix} e^{-u}\operatorname{sech}v & e^{-u}\tanh v \\ -e^{-u}\sinh v & e^{-u}\end{pmatrix}$$

補足：チェイン・ルールについて

$$F\colon (u,v)\mapsto \bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)=(e^u\operatorname{sech}v, e^u\tanh v),$$
$$F^{-1}\colon (x,y)\mapsto \bigl(u(x,y),v(x,y)\bigr)$$

$$dF^{-1}=\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-u}\operatorname{sech}v & e^{-u}\tanh v \\ -e^{-u}\sinh v & e^{-u}\end{pmatrix}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial x}=u_x\frac{\partial \tilde f}{\partial u}+v_x\frac{\partial \tilde f}{\partial v}$$
$$=e^{-u}\operatorname{sech}v\,\frac{\partial \tilde f}{\partial u}-e^{-u}\sinh v\,\frac{\partial \tilde f}{\partial v}$$
- $$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{-u}\tanh v\,\frac{\partial \tilde f}{\partial u}+e^{-u}\frac{\partial \tilde f}{\partial v}$$

補足：チェイン・ルールについて

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-u}\operatorname{sech} v & e^{-u}\tanh v \\ -e^{-u}\sinh v & e^{-u} \end{pmatrix}$$

補足：チェイン・ルールについて

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-u}\operatorname{sech} v\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} - e^{-u}\sinh v\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-u}\tanh v\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + e^{-u}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$$

$\tilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ ：何でもよい

$$\frac{\partial}{\partial x} = e^{-u}\operatorname{sech} v\,\frac{\partial}{\partial u} - e^{-u}\sinh v\,\frac{\partial}{\partial v}$$

補足：チェイン・ルールについて

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

・ $\dfrac{\partial}{\partial x} = e^{-u}\operatorname{sech} v\,\dfrac{\partial}{\partial u} - e^{-u}\sinh v\,\dfrac{\partial}{\partial v}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-u}\operatorname{sech} v\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} - e^{-u}\sinh v\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right)$$

$$= e^{-u}\operatorname{sech} v\,\frac{\partial}{\partial u}\left(e^{-u}\operatorname{sech} v\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} - e^{-u}\sinh v\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right) \quad ①$$

$$- e^{-u}\sinh v\,\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{-u}\operatorname{sech} v\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} - e^{-u}\sinh v\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right) \quad ②$$

$$① = e^{-u}\operatorname{sech} v\left(-e^{-u}\operatorname{sech} v\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + e^{-u}\operatorname{sech} v\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u^2} + e^{-u}\sinh v\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} - e^{-u}\sinh v\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v}\right)$$

つづく

2

$$e^{-u}\sinh v \frac{\partial}{\partial v}\left(e^{-u}\operatorname{sech} v \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} - e^{-u}\sinh v \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right)$$

1

$$= e^{-u}\sinh v \left(-e^{-u}\operatorname{sech} v \tanh v \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + e^{-u}\operatorname{sech} v \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial v \partial u} - e^{-u}\cosh v \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} - e^{-u}\sinh v \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial v^2}\right)$$

$\vdots$

補足：チェイン・ルールについて

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-u} \tanh v \, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + e^{-u} \, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$$

補足：チェイン・ルールについて

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-2u}\left(\operatorname{sech}^2 v \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u^2} - 2\tanh v \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v} + \sinh^2 v \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial v^2}\right.$$

$$\left.(\tanh^2 v - \operatorname{sech}^2 v)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + (\tanh v + \sinh v \cosh v)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-2u}\left(\tanh^2 v \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u^2} + 2\tanh v \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial v^2}\right.$$

$$\left.(\operatorname{sech}^2 v - \tanh^2 v)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} - \tanh v \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right)$$

補足：チェイン・ルールについて

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
$$= e^{-2u}\left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u^2} + \cosh^2 v\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial v^2} + \sinh v \cosh v\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right)$$

$\tilde{f}(u,v) = F(v)$

$\Delta f = 0$

$f(x,y) = F(v(x,y))$ のとき $F = ?$

$F(0) = 0 \quad F'(0) = 1$

$\cosh^2 v\, F'' + \sinh v \cosh v\, F' = 0$

$F'' + \tanh v\, F' = 0$

$\frac{F''}{F'} = -\frac{\sinh v}{\cosh v} \Rightarrow (\log F')' = -\log(\cosh v)'$

$$(\lg F')' = \left(\lg \frac{1}{\cosh v}\right)' \qquad F'(0) = 1$$

$$\lg F' = \lg \frac{1}{\cosh v}$$

$$F' = \operatorname{sech} v \qquad F(0) = 0$$

$$F(v) = \int_{0}^{v} \operatorname{sech} t \, dt$$

$$= \operatorname{Tan}^{-1} \sinh v.$$