微分積分学第一 (LAS.M101-06)

広義積分

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/25

広義積分の収束条件

$[a, b)$

$[a, \infty)$ … 例2:同様

事実 (事実 7.5)

区間 $I = (a, b]$ で定義された連続関数 f, g がともに I 上で $f(x) \geqq 0$, $g(x) \geqq 0$ を満たし，さらに

$$0 \leqq f(x) \leq g(x) \qquad (x \in I), \qquad \text{かつ} \qquad \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{が収束する}$$

ならば，広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

は収束する．

例

命題 (命題 7.9)

任意の実数 p と正の実数 a に対して

$$\int_1^\infty x^p e^{-ax}\,dx$$

は収束する.

$$\left(\frac{a}{2}x\right)^p \leqq Me^{\frac{ax}{2}}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^p x^p \cdot e^{-ax} \leqq Me^{-\frac{ax}{2}}$$

$$\int^\infty x^p e^{-ax}\,dx \leqq \int^\infty Me^{-\frac{ax}{2}}\,dx$$

収束

- m: 正の整数, $x \geqq 0 \Rightarrow x^m \leqq m!e^x$ (補題 7.6)
- $p \geqq 0$, $x \geqq 0 \Rightarrow x^p \leqq Me^x$ (系 7.7)

指数関数は多項式よりずっと早く大きくなる.

例

命題 (例 7.10)

負でない実数 p に対して

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^2}\,dx$$

は収束する.

Gamma Function

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx \quad (s > 0)$$

$s \geq 1$: 広義積分でない

$$= \int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\, dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$$

$0 < s < 1$

収束

$e^{-x} x^{s-1} \leq x^{s-1}$ 収束 on $0 \leq x \leq 1$

収束