微分積分学第一 (LAS.M101-06)

広義積分

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/25

広義積分の収束条件

事実 (事実 7.5)

区間 $I=(a,b]$ で定義された連続関数 f, g がともに I 上で $f(x)\geqq 0$, $g(x)\geqq 0$ を満たし，さらに

$$f(x)\leqq g(x) \qquad (x\in I), \qquad \text{かつ} \qquad \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{が収束する}$$

ならば，広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

は収束する．

例

命題 (命題 7.9)

任意の実数 p と正の実数 a に対して

$$\int_1^\infty x^p e^{-ax}\,dx$$

は収束する．

- m: 正の整数，$x \geqq 0 \Rightarrow x^m \leqq m!e^x$ (補題 7.6)
- $p \geqq 0$, $x \geqq 0 \Rightarrow x^p \leqq Me^x$ (系 7.7)

例

命題 (例 7.10)

負でない実数 p に対して

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^2}\,dx$$

は収束する.

例

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \qquad (s > 0)$$