微分積分学第一 (LAS.M101-06)

広義積分

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/calc-1/

東京工業大学

2024/07/25

例（定理 7.14）

• e^{-x^2}の原始関数は初等関数ではない

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

普通の積分

存在

• 収束する $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$

$x \geq 1$ のとき $x^2 \geq x$

なので $e^{-x^2} \leq e^{-x}$

$\int_1^{\infty\,M} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_1^{\infty\,M} = \frac{1}{e}$.

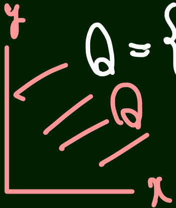
収束

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

$$= \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}dy = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dy$$

$$= \iint_Q e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

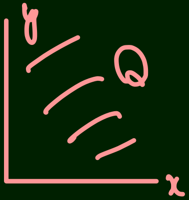


$$Q = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$= \iint_Q e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$



$$= \iint_R e^{-r^2} \overset{\overset{r}{\shortparallel}}{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|}\,dr\,d\theta$$

$R = \{(r,\theta);\ r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\}$

$$= \iint_R e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} r e^{-r^2}\,dr$$

$r^2 = u$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-u}\,du = \frac{\pi}{4}$$

実数 μ と正の数 σ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}\,dx = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \mu, \qquad \text{平均}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \sigma^2. \qquad \text{分散}$$

平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布の密度関数

σ: 標準偏差

X: その正規分布にしたがう確率変数

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b \square\, dx$$

ご聴講
ありがとうございました