

## 2. 多変数関数と偏微分

### 2.1 多変数関数

記号 正の整数  $n$  に対して,  $n$  個の実数の組全体の集合を  $\mathbb{R}^n$  と書く:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

たとえば  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \mid x, y \text{ は実数}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \text{ は実数}\}$$

である. とくに  $\mathbb{R}$  は数直線,  $\mathbb{R}^2$  は座標平面,  $\mathbb{R}^3$  は座標空間とみなすこともできる. 集合  $\mathbb{R}^n$  の要素のことを  $\mathbb{R}^n$  の点とよんだりする<sup>1)</sup>.

多変数関数 集合  $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $D$  上の各点  $(x_1, \dots, x_n)$  に対して実数  $f(x_1, \dots, x_n)$  を対応させる規則  $f$  を  $D$  上で定義された ( $n$  変数) 関数,  $D$  を  $f$  の定義域という<sup>2)</sup>. とくに  $n \geq 2$  の場合を多変数関数 といい, 1 変数関数と区別する. 第 1.1 節と同様に, “ $f$  は  $D \subset \mathbb{R}^n$  上で定義された関数である” というのを次のように表す (とくに断らない限り値域は  $\mathbb{R}$  とする):

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}.$$

例 2.1. 点  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  に対して  $f_0(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  とおくと  $f_0$  は  $\mathbb{R}^2$  上で定義された関数である<sup>3)</sup>:  $f_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . ここで与えた対応の規則は

$$f_0: \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f_0(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$

と書ける. とくに  $f_0(0, 0) = 0$ ,  $f_0(1, 0) = 1$ ,  $f_0(-1, -1) = \sqrt{2}$  である. ◇

<sup>\*)</sup>2024 年 6 月 18 日/20 日

<sup>1)</sup>数直線: the number line; 座標平面: the coordinate plane, the Cartesian plane; 座標空間: the coordinate space; 点: a point.

<sup>2)</sup>この授業では  $D$  としてあまり変な部分集合は考えない.  $D$  を  $\mathbb{R}^n$  の “領域” (ちゃんとした定義のある言葉である) とするのが妥当だが, その定義を述べるのにはすこし手間がかかるので, いまはあまり気にしないことにする. 第 3 回, およびテキスト 7 ページの脚注 4 参照.

<sup>3)</sup>2 変数関数の場合,  $\mathbb{R}^2$  の点を  $(x_1, x_2)$  と書くかわりに  $(x, y)$  と書くことがある. このとき “ $f(x, y)$  は  $x$  と  $y$  の 2 変数関数である” というのもある. この講義では, 簡単のため, 主に 2 変数関数を扱うが, 多くの性質は一般の多変数関数に容易に拡張できる.

例 2.2. 東経  $x$  度, 北緯  $y$  度の地点の標高を  $f_a(x, y)$  メートルとすると,  $f_a(x, y)$  は  $x$  と  $y$  の 2 変数関数である (定義域は適当に考えよう). たとえば

$$f_a(\text{富士山頂の経度}, \text{富士山頂の緯度}) = \text{富士山の標高}$$

である. ◇

例 2.3. いまこの瞬間の, 東経  $x$  度, 北緯  $y$  度の地点の地表における気圧を  $f_p(x, y)$  ヘクトパスカルとすれば,  $f_p(x, y)$  は  $x$  と  $y$  の 2 変数関数である. ◇

グラフと等高線 1 変数関数の場合 (第 1 節; 4 ページ) と同様に 2 変数関数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subset \mathbb{R}^2$ ) に対して,  $\mathbb{R}^3$  の部分集合

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$$

を  $f$  のグラフという. 関数  $f$  が “性質のよい” 関数ならばそのグラフは座標空間  $\mathbb{R}^3$  の曲面になる.

一方, 2 変数関数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  と定数  $c$  に対して,  $D$  の ( $\mathbb{R}^2$  の) 部分集合

$$\{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$$

を, 関数  $f$  の高さ  $c$  の等高線という<sup>4)</sup>. 関数  $f$  の高さ  $c$  の等高線は, 座標空間の  $xy$  平面に平行な平面  $z = c$  によるグラフの切り口となっている. 関数  $f$  が “性質がよい” もので,  $c$  が “適切な” 値であれば, 等高線は座標平面のなめらかな曲線になる. なめらかな曲線になるための条件は第 3 回で扱う.

2 変数関数のグラフや等高線は関数の変化の様子を表しているといってよい.

一般に  $n$  変数関数  $f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  と定数  $c$  に対して

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\} \subset D \subset \mathbb{R}^n$$

をそれぞれ  $f$  のグラフ, 値  $c$  の等高面または等値集合という.

例 2.4. (1)  $\mathbb{R}^2$  で定義された関数  $f_1(x, y) = x^2 + y^2$  の像は  $[0, +\infty)$  である. いま  $c \in (0, +\infty)$  に対して, 集合  $\{(x, y) \mid f_1(x, y) = c\}$  は,  $xy$

<sup>4)</sup>等高線: the contour, the level curve, the level set.

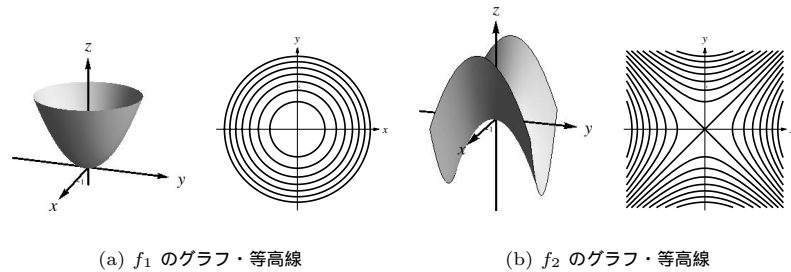


図 2.1 例 2.4

平面上の原点を中心とする半径  $\sqrt{c}$  の円である．これが  $f_1$  の高さ  $c$  の等高線であるから， $c$  の値を変化させていくと，等高線は原点を中心とする同心円を描く．このことから， $f_1$  のグラフは  $z$  軸に垂直な平面で切った切り口は円となる（図 2.1 (a)）．

- (2)  $\mathbb{R}^2$  で定義された関数  $f_2(x, y) = x^2 - y^2$  の像は  $\mathbb{R}$  で，実数  $c$  に対して集合  $\{(x, y) | f_2(x, y) = c\}$  は， $xy$  平面上の双曲線（ $c = 0$  のときは 2 本の直線）を与える．この関数のグラフと等高線は図 2.1 (b) のようになる．  $\diamond$

スカラ場 例 2.2, 2.3 のように，関数  $f$  が「座標平面  $\mathbb{R}^2$ （の部分集合  $D$ ）の各点に対して実数が対応している」とみなせるとき， $f$  を  $\mathbb{R}^2$  上（ $D$  上）のスカラ場<sup>5)</sup> または平面のスカラ場という．例 2.2 で挙げた標高のスカラ場のグラフは地表そのものであり，等高線は地図で用いられる等高線である．また，例 2.3 で与えられるスカラ場の等高線は等圧線とよばれる．

同様に，3 変数関数が，座標空間の各点に対して実数を対応させているとみなせるとき，空間のスカラ場という<sup>6)</sup>．

<sup>5)</sup> スカラ場: a scalar field. 「スカラー場」と書くこともある．

<sup>6)</sup> いまのところ，スカラ場は多変数関数と同義とされていて良い．定義域が何がしかの「空間」「世界」であると思えるとき，スカラ場という言葉を使いたくなる．

## 2.2 偏微分と偏導関数

1 変数関数の微分（復習） 区間  $I \subset \mathbb{R}$  上で定義された 1 変数関数  $f$  と  $a \in I$  に対して極限值

$$(2.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき， $f$  は  $a$  で微分可能であるという．このとき，極限值 (2.1) を  $f$  の  $a$  における微分係数とよび， $f'(a)$  で表す<sup>7)</sup>．定義域  $I$  上のすべての点で  $f$  が微分可能ならば，新しい関数

$$f': I \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$$

が定まる．これを  $f$  の導関数とよぶ．関数  $f$  を  $y = f(x)$  と書き表したとき，

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

と書く．この記法は合成関数・逆関数の微分公式を覚えるのに便利であった．

微分可能な関数  $f$  の導関数  $f'$  が微分可能なとき， $f'$  の導関数  $f''$  を  $f$  の 2 次導関数（2 階微分）， $f''(x)$  の導関数を 3 次導関数... とよぶ<sup>8)</sup>．一般に  $f$  ( $y = f(x)$ ) の  $n$  次導関数を

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

と書く．ここで  $f^{(0)}(x) = f(x)$  と約束しておく．

偏微分係数と偏導関数 領域<sup>9)</sup>  $D \subset \mathbb{R}^2$  で定義された 2 変数関数

$$f: D \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

を考える．点  $(a, b) \in D$  において，極限值

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

<sup>7)</sup> 微分可能: differentiable; 微分係数: the differential coefficient; 導関数: the derivative;  $f'$ :  $f$ -prime (通常 dash とは読まない)．

<sup>8)</sup> 2 次導関数: the second derivative; 3 次導関数: the third derivative;  $n$  次導関数: the  $n$ -th derivative.

<sup>9)</sup> 用語 “領域 (a domain)” の意味は第 3 回に述べる．

がともに存在するとき,  $f$  は  $(a, b)$  で偏微分可能であるといって,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \left( \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

を,  $f$  の  $(a, b)$  における  $x$  に関する ( $y$  に関する) 偏微分係数という.

さらに  $f$  が  $D$  の各点で偏微分可能なとき,

$$\frac{\partial f}{\partial x}: D \ni (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \in \mathbb{R}$$

は  $D$  で定義された 2 変数関数を与える. これを  $f$  の  $x$  に関する偏導関数または偏微分という<sup>10)</sup>. 同様に  $f$  の  $y$  に関する偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial y}$  も定義される.

記号 2.5. 偏導関数の記号 “ $\partial$ ” はディーまたはラウンド・ディーと読む. これを  $d$  と書くことはない. 1 行におさめたい時は

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

のように書く. プライム (') は用いない.

偏導関数の計算 関数  $f$  (関数  $f(x, y)$  ということがある) の  $x$  に関する偏導関数は,  $y$  の値を止めたまま  $x$  を変化させて得られる 1 変数関数の導関数とみなせる. したがって  $f(x, y)$  が  $x, y$  の式で与えられているとき,

(2.2)  $f_x$  は  $f(x, y)$  の  $y$  を定数とみなして  $x$  に関して微分したもの

(2.3)  $f_y$  は  $f(x, y)$  の  $x$  を定数とみなして  $y$  に関して微分したもの

である. 関数  $f(x, y)$  に対して  $f_x(x, y)$  ( $f_y(x, y)$ ) を求めることを「 $x$  で ( $y$  で) 偏微分する」という.

2 階の偏導関数 関数  $f(x, y)$  の偏導関数  $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$  がそれぞれ偏微分可能ならば 4 つの 2 変数関数

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}, & f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}, \\ f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

を考えることができる. これらを  $f$  の 2 次偏導関数という<sup>11)</sup>.

<sup>10)</sup> 偏微分可能: partially differentiable;  $x$  に関する偏導関数: the partial derivative with respect to  $x$ .

<sup>11)</sup> 2 次偏導関数: the second partial derivatives.

例 2.6. 2 変数関数  $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^2$  に対して

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 6xy, \quad f_y(x, y) = 3x^2 + 2y.$$

さらにこれを微分して次の 2 次偏導関数を得る:

$$f_{xx} = 6x + 6y, \quad f_{xy} = 6x, \quad f_{yx} = 6x, \quad f_{yy} = 2. \quad \diamond$$

例 2.7. 平面  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $D = \{(x, y) | x \neq 0\}$  上で定義された 2 変数関数

$$f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

に対して, (1.8) を用いれば

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \left( -\frac{y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ f_y(x, y) &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

さらにこれを微分して次の 2 次偏導関数を得る:

$$f_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \quad \diamond$$

例 2.6, 2.7 では  $f_{xy}$  ( $x$  で偏微分して, そのあと  $y$  で偏微分したもの) と  $f_{yx}$  ( $y$  で偏微分してから  $x$  で偏微分したもの) が一致する. これは偶然ではなく, よく使われる状況では  $f_{xy}$  と  $f_{yx}$  は一致する. この事実 (偏微分の順序交換定理<sup>12)</sup>) といわれる) を正確に述べるには, 2 変数関数の連続性の概念が必要なので, 第 3 回で扱う. 問題 2-9 は  $f_{xy}$  と  $f_{yx}$  が一致しない例である.

高階の偏導関数 2 次偏導関数がさらに偏微分可能ならば, 3 次偏導関数を考えることができる. 一般に 2 変数関数  $f$  ( $f(x, y)$ ) の 3 次偏導関数は

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}, \dots$$

<sup>12)</sup> 偏微分の順序交換可能性: the commutativity of partial differentials.

などたくさんあるが、性質のよい関数ならば、たとえば上の 3 つは一致する (偏微分の順序交換定理)。このような場合、3 次偏導関数は

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

の 4 通りとなる。さらに高次の偏導関数も考えることができる。

**多変数関数の偏導関数** 一般に  $n$  変数関数  $f(x_1, \dots, x_n)$  の第  $i$  番目 ( $i = 1, \dots, n$ ) の変数以外を定数とみなして微分して得られた関数を  $f$  の  $x_i$  に関する偏導関数または偏微分という。変数の個数が多い場合も、よく使われる状況では偏微分の順序交換が可能である：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \quad (1 \leq k, l \leq n).$$

### 微分方程式

自然法則を関数 (量) とその導関数 (偏導関数) の関係式で表すことがしばしばある。とくに、考えている量を未知としたとき、この関係式を微分方程式という。

**常微分方程式** 1 変数関数  $u(t)$  とその導関数、2 次導関数 ... の間の関係式を常微分方程式<sup>13)</sup>といい、その関係式をみたす関数  $u(t)$  を微分方程式の解という。

**例 2.8.** 放射性物質  $A$  が崩壊していく状況を考える。時刻  $t$  における物質  $A$  の質量を  $u(t)$  とおくと、 $u(t)$  は常微分方程式

$$(2.4) \quad \frac{du}{dt} = -\lambda u \quad (\lambda \text{ は正の定数})$$

をみたす。任意の定数  $k$  に対して

$$(2.5) \quad u(t) = ke^{-\lambda t}$$

はこの方程式の解である。逆に、(2.4) の解は (2.5) の形をしている<sup>14)</sup>。◇

**例 2.9.** 理想的なばねの先端につけた質量  $m$  の質点が振動している状況を考える。ばねに沿って  $x$  軸をとり、平衡点を原点とし、時刻  $t$  における質点の位置を  $x(t)$  とする。質点に働く力はフックの法則<sup>15)</sup>に従うばねの復元力  $-kx$  ( $k > 0$  は、ばね定数) および速度に比例する空気抵抗  $-\rho \frac{dx}{dt}$  ( $\rho > 0$  は定数) のみとすると、時刻  $t$  におけるばね

<sup>13)</sup>常微分方程式：an ordinary differential equation.

<sup>14)</sup>方程式 (2.4) の任意の解が (2.5) となることは、一般論として「常微分方程式の解の一意性」から結論することができる。詳しくは「微分積分学第二」で述べる。

<sup>15)</sup>フックの法則：Hooke's Law; Hooke, Robert, (1635–1703, En).

の位置  $x(t)$  は

$$(2.6) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + \rho \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

をみたす。この方程式は  $x = x(t)$  の 2 次導関数を含んでいるので 2 階常微分方程式という。これに対して (2.4) のような方程式を 1 階常微分方程式という。この方程式の解は、物理学 (力学、電気回路など) で学ぶ。◇

**偏微分方程式** 多変数関数の偏導関数の関係式を偏微分方程式<sup>16)</sup>、その関係式を満たす関数を偏微分方程式の解という。

**例 2.10** (ラプラスの方程式・ポアソンの方程式)。2 変数関数  $u = u(x, y)$ , 3 変数関数  $w = w(x, y, z)$  をそれぞれ座標平面、座標空間のスカラー場とみなすとき、

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

によりあたらしい関数をつくる対応  $\Delta$  をラプラス作用素<sup>17)</sup> という。

とくに偏微分方程式  $\Delta u = 0$  ( $\Delta w = 0$ ) (ラプラス方程式と呼ばれる) をみたす関数  $u$  ( $w$ ) は調和関数<sup>18)</sup>と呼ばれる。

ラプラス方程式はさまざまな場面に現れる。たとえば、真空中の静電場のポテンシャル (電位) が調和関数となることは電磁気学で学ぶ。また、ニュートンの万有引力の法則に従う重力場のポテンシャル (万有引力の位置エネルギー) は調和関数となることを力学で学ぶ。さらに、空間に電荷や質量が分布している場合は、これらのポテンシャルは  $\Delta w = \rho$  ( $\rho = \rho(x, y, z)$  は点  $(x, y, z)$  における電荷 (質量) 密度) をみたす。このような  $\Delta w = \rho$  ( $\rho$  は既知関数) の形の方程式をポアソン方程式<sup>19)</sup>とよぶ。◇

**例 2.11** (針金の熱伝導)。一様な針金に沿って  $x$  軸を配置し、時刻  $t$  における針金の位置  $x$  における針金の温度を  $u(t, x)$  とすると、 $u$  は

$$(2.7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

をみたす。この方程式を (1 次元の) 熱方程式<sup>20)</sup>という。ただし  $c$  は針金の熱容量と熱伝導率によって定まる正の定数である。関数

$$(2.8) \quad u_0(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right)$$

は  $\{(t, x) | t > 0\} \subset \mathbb{R}^2$  で定義された (2.7) の解である (問題 2-10)。これを熱方程式 (2.7) の基本解とよぶ。高等学校数学 B で学んだ言葉を用いれば、各  $t$  を指定すること

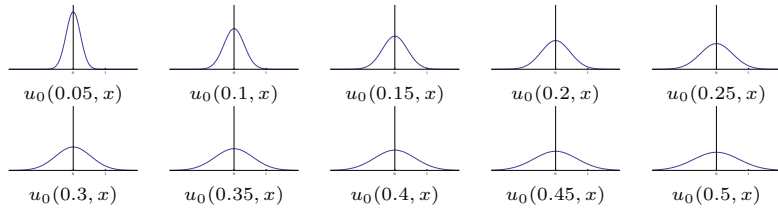
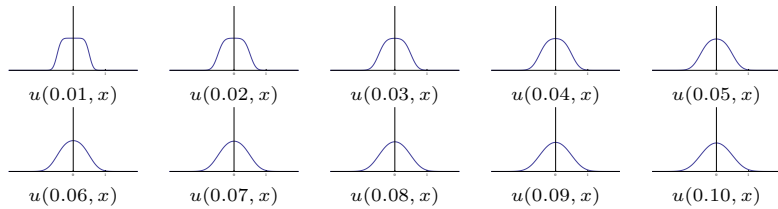
<sup>16)</sup>偏微分方程式：a partial differential equation.

<sup>17)</sup>ラプラス作用素：the Laplacian; ラプラス：Laplace, Pierre-Simon (1749–1827, F).

<sup>18)</sup>調和関数：a harmonic function.

<sup>19)</sup>ポアソン方程式：the Poisson equation; ポアソン：Poisson, Siméon Denis (1781–1840, F).

<sup>20)</sup>熱方程式：the heat equation.

図 2.2 熱方程式の基本解 ( $c = 1$ )図 2.3 熱方程式の解 (2.9) ( $c = 1$ )

に  $u_0(t, x)$  は平均 0 , 分散  $2ct$  (標準偏差  $\sqrt{2ct}$ ) の正規分布の密度関数である . とくに

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right) dx = 1$$

が成り立つ<sup>21)</sup> . 時刻  $t$  を 0 に近づけると

$$\lim_{t \rightarrow +0} u_0(t, x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

と ,  $t = 0$  では定義されないが ,  $t > 0$  ではなめらかな関数を与える (図 2.2) . 次に , 関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ 0 & (|x| > \frac{1}{2}) \end{cases}$$

に対して

$$(2.9) \quad u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t, x-y) f(y) dy$$

とすると  $u(t, x)$  も (2.7) の解を与えており ,  $t \rightarrow 0$  とすると “大体”  $f$  に近づく<sup>22)</sup> (図 2.3) .  $\diamond$

<sup>21)</sup> この積分の求め方は , 第 7 回に紹介する .

<sup>22)</sup> “大体” の説明は今回はしない .

例 2.12 (弦の振動と波動方程式) . 一様な弦が振動している状況を考える . 弦にそって  $x$  軸をとり , 時刻  $t$  における弦の平衡点からのずれを  $u(t, x)$  とすると , 振幅が小さいときは  $u$  は

$$(2.10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

をみたく . ただし  $c$  は弦の張力と線密度から定まる正の定数である . これを波動方程式<sup>23)</sup> とよぶ . この方程式の任意の解は

$$u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

と書ける . ただし  $F, G$  は (すきなだけ微分可能な) 1 変数関数である (問題 2-11)<sup>24)</sup> .

熱方程式と同じように , 平面や空間の波動方程式は  $u_{tt} = c^2 \Delta u$  と表される . 太鼓の膜の振動や空間の波動は (場合によっては近似的に) この方程式により表される .  $\diamond$

## 問 題 2

2-1 次は正しいか :

- (1) 区間  $I \subset \mathbb{R}$  上で定義された関数  $f$  のグラフは存在しないことがある .
- (2) 領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上で定義された関数  $f$  のグラフは存在しないことがある .

2-2 (1) 身の回りの量で , 2 変数関数 , 3 変数関数... で表されるものの具体例を挙げなさい .

- (2) 次のような意見に対して , 有効な反論をなるべくたくさん挙げなさい :  
3 変数関数 , 4 変数関数... のグラフは描くことができない . したがって , このような関数を考えることに実用的な意味はない .

2-3 例 2.1 の関数  $f$  のグラフを描きなさい . また , 高さ 1, 2, 3... の等高線を描きなさい .

2-4 例 2.4 を確かめなさい .

2-5 1 変数関数  $F$  に対して ,  $f(x, y) = F(\sqrt{x^2 + y^2})$  により 2 変数関数  $f$  を定義する .

- (1)  $f$  の等高線はどのような形になるか .
- (2)  $f$  のグラフはどのような形になるか .

<sup>23)</sup> 波動方程式 : the wave equation.

<sup>24)</sup> 応用上必要な解を求めるには , さらに境界条件や初期条件を考慮する必要がある .

## 2-6 2 変数関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

に対して

(1) 次の値を求めなさい:

- $f(0, 0), f(1, 1), f(1, 2), f(1, 3).$
- $f(2, 4), f(3, 6), f(4, 8).$
- $f(a, ma)$  ( $m$  は定数,  $a$  は 0 でない定数).

(2)  $f$  の等高線を描きなさい.

(3)  $f$  の偏導関数をすべて求めなさい

2-7 一般に  $n$  変数関数の 2 次偏導関数は何通りあるか. 偏微分の順序交換ができる場合と, 順序を入れ替えた偏微分を区別しなければならない場合について考えなさい.

2-8 一般に  $n$  変数関数の  $m$  次偏導関数は何通りあるか. 偏微分の順序交換ができる場合と, 順序を入れ替えた偏微分を区別しなければならない場合について考えなさい.

2-9 関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

は 2 階偏微分可能であることを示し, 2 次偏導関数を求めなさい.

2-10 式 (2.8) が熱方程式 (2.7) をみたすことを確かめなさい.

2-11 関数

$$u(t, x) = a \sin(x + qt) + b \sin(x - qt) \quad (a, b, q \text{ は定数})$$

が波動方程式 (2.10) を満たすような定数  $a, b, q$  の値を求めなさい.

2-12 次の 2 変数関数は調和関数であることを確かめなさい:

$$f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

また,  $x, y$  の 3 次以下の多項式で調和関数となるものをすべて求めなさい.

2-13 1 変数関数  $F(t)$  を用いて

$$f(x, y, z) = F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

という形でかけるような 3 変数関数  $f$  が調和関数となるような  $F$  を求めなさい.

2-14 2 変数関数  $f(x, y)$  に関する関係式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = 0$$

をみたすとき, 関数  $f$  のグラフが与える曲面を極小曲面という<sup>25)</sup>. 次の関数 (定義域はどう考えるのがよいか) のグラフは極小曲面であることを確かめなさい:

$$f(x, y) = \text{Cosh}^{-1} \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$g(x, y) = \log \frac{\cos x}{\cos y},$$

$$h(x, y) = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}.$$

2-15 (1) 実数  $\theta$  に対して  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $i$  は虚数単位) と定める (オイラーの公式). さらに, 複素数  $z = x + iy$  ( $x, y$  は実数) に対して

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

と定めよう. すると,  $e^z$  の実部  $\text{Re } e^z$  および虚部  $\text{Im } e^z$  は  $(x, y)$  の調和関数であることを確かめなさい.

(2) 複素数  $z = x + iy$  に対して  $f(z) = z^m$  ( $m$  は正の整数) とする.  $\text{Re } f(z)$  ( $\text{Im } f(z)$ ) は  $(x, y)$  の関数とみなすことができるが, これは  $(x, y)$  の調和関数であることを  $m = 2, 3, 4$  に対して確かめなさい. 一般の  $m$  ではどうか.

<sup>25)</sup> 極小曲面: a minimal surface.