

3. 連続性と微分可能性

3.1 1 変数関数の微分可能性と連続性 (復習)

定義 3.1. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の 1 変数関数 f が $a \in I$ で連続であるとは¹⁾

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである²⁾. 関数 f が定義域 I の各点で連続なとき f は I で連続である, あるいは連続関数であるという.

例 3.2. (1) 次の関数 (例 1.4 (2)) は 0 で連続でない:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

実際 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$ であるが $f(0) = 0$.

(2) 次の関数 f は 0 で連続でない:

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

実際, $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定めると, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の極限值は 0 であるが, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -1$ となるので $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在しない. ◇

16 ページで定義を与えた微分可能性から連続性が従う:

定理 3.3. 1 変数関数 f が a で微分可能ならば a で連続である.

証明. 極限の性質から

$$\begin{aligned} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) - f(a) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} h \right) = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} h \right) \\ &= f'(a) \times 0 = 0. \end{aligned} \quad \square$$

^{*)}2024 年 6 月 25 日/27 日

¹⁾連続: continuous; 連続関数: a continuous function.

²⁾すなわち x が a に近づくとき, その近づき方によらず $f(x)$ が $f(a)$ に近づく. 例 3.2 (2) 参照. きちんとした極限の議論は後期に扱う.

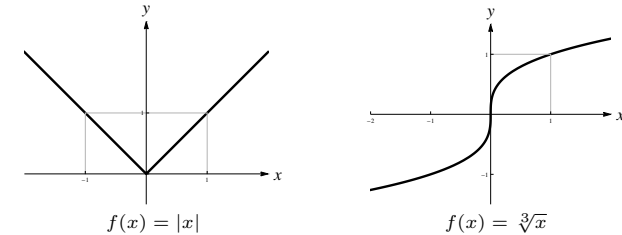


図 3.1 例 3.4

例 3.4. (1) 関数 $f(x) = |x|$ は 0 で微分可能でない (図 3.1 左).

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ($x \in \mathbb{R}$) で与えられる関数 f は 0 で微分可能でない. 実際

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} \rightarrow +\infty \quad (h \rightarrow 0)$$

である. 関数 f のグラフは, なめらかな曲線である (図 3.1 右).

(3) 例 1.4 の (1) で挙げた関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は 0 で (したがって \mathbb{R} 全体で) 微分可能で,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

となる. 実際 $f'(0)$ は “はさみうちの原理”³⁾ から求まる. ◇

C^k -級関数 区間 I で定義された 1 変数関数 f が区間 I で

- C^0 -級である⁴⁾とは I で連続なこと,
- C^1 -級であるとは, I で微分可能で, 導関数 f' が I で連続となること,
- C^k -級 ($k > 0$ は整数) であるとは, f の k 次導関数 $f^{(k)}$ が存在して, それが I で連続となること,
- C^∞ -級であるとは, 全ての負でない整数 k に対して C^k -級であることとする.

³⁾はさみうちの原理: the squeeze theorem.

⁴⁾ C^0 -級: of class C^0 ; C^r -級: of class C^r ; C^∞ -級: of class C^∞ (C -infinity).

例 3.5. • 例 3.4 (3) の関数 f は \mathbb{R} で微分可能だが, C^1 -級ではない. 実際, 例 3.2 の (2) から導関数 f' は 0 で連続でない.

- 第 1 回の初等関数は, 定義域に含まれる开区間で C^∞ -級である. ただし冪乗根 $\sqrt[n]{x}$ は $\{x | x > 0\}$ で定義されているとする. \diamond

3.2 多変数関数の連続性・微分可能性

多変数関数の微分可能性の定義を与えよう. 簡単のために話を 2 変数関数に限るが, 以下の議論は n 変数関数 ($n > 2$) に容易に一般化できる.

領域 座標平面 \mathbb{R}^2 の部分集合 D が領域であるとは, それが “ひと続きで端をもたない” ことである⁵⁾. たとえば \mathbb{R}^2 全体, 開円板や開長方形⁶⁾

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < r^2\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a < x < b, c < y < d\}$$

は領域である. ただし実定数 r, a, b, c, d は $r > 0, a < b, c < d$ をみたす.

極限 2 変数関数 f の極限值が A , すなわち

$$(3.1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A \quad \left(f(x,y) \rightarrow A \quad ((x,y) \rightarrow (a,b)) \right)$$

をみたす⁷⁾とは (x, y) がどのような経路で (a, b) に近づいても $f(x, y)$ の値が A に近づくことである⁸⁾. とくに $(a + h, b + k)$ が (a, b) に近づくことは (h, k) が $(0, 0)$ に近づくことと同じだから

$$(3.2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a+h, b+k).$$

事実 3.6. 2 変数関数 α, β, f が

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \alpha(h,k) = 0, \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \beta(h,k) = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A$$

をみたしているならば $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a + \alpha(h, k), b + \beta(h, k)) = A$.

⁵⁾領域: a domain; もう少し正確な意味はこの節末で述べる

⁶⁾開円板: an open disc; 開長方形: an open rectangle (rectangular domain).

⁷⁾ $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のときの極限を考える際, f は (a, b) で定義されていない(いてもよい). 極限値: the limit.

⁸⁾極限に関するもう少し厳密な議論は後期の微分積分学第二で扱う. ここでは以下を認めて議論をすすめる.

事実 3.7. (1) (3.1) が成り立つための必要十分条件は, 0 に収束する任意の 2 組の数列 $\{h_n\}, \{k_n\}$ に対して⁹⁾次が成り立つことである:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a + h_n, b + k_n) = A.$$

- (2) (3.1) が成り立たないための必要十分条件は, $\{f(a + h_n, b + k_n)\}$ が A に収束しないように, 0 に収束する数列 $\{h_n\}, \{k_n\}$ をうまく選ぶことができることである.

例 3.8. (1) \mathbb{R}^2 全体で定義された関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

を考える (問題 2-6 参照). いま, $h_n = 1/n, k_n = 1/n, k'_n = -1/n$ で 3 つの数列 $\{h_n\}, \{k_n\}, \{k'_n\}$ を定めると, これらは 0 に収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(h_n, k_n) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(h_n, k'_n) = -1$$

となる. この第 1 式と事実 3.7 (1) から, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $f(x, y)$ は 1 以外の実数を極限值にもたない. また第 2 式から $f(x, y)$ は -1 以外の実数を極限值にもたない. これらから $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $f(x, y)$ は極限值をもたないことがわかる.

一方, 0 でない y をひとつ固定して, 1 変数関数の極限值をとると

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{だから} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0,$$

同様に

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{だから} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0.$$

- (2) $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ は $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ としたときの極限值をもたない. 一方,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = -1.$$

- (3) 関数 $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ は $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ で極限值 0 をもつ. 実際, $r > 0$ と θ を用いて $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と書くと,

⁹⁾任意 (にんい) の: arbitrary; 任意の X に対して P が成り立つ: P holds for an arbitrary X .

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$ と $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ とは同値である。いま

$$(*) \quad f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^2 \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta \cos 2\theta = \frac{1}{4} r^2 \sin 4\theta$$

だが, $|\sin 4\theta| \leq 1$ だから, $(*)$ の右辺は $r \rightarrow 0$ で 0 に近づく。◇

連続性 第 3.1 節にならって 2 変数関数の連続性を次のように定義する:

定義 3.9. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 f が $(a, b) \in D$ で連続であるとは,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

が成り立つことである。関数 f が定義域 D のすべての点で連続であるとき, f は D で連続, あるいは D 上の連続関数であるという。

例 3.10. (1) 例 3.8 の (1) の関数 f は $(0, 0)$ で連続でない。しかし, 偏微分可能で $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ である。

(2) 次の関数 (問題 2-9) は $(0, 0)$ で連続である (例 3.8 (3)):

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases} \quad \diamond$$

変数 x, y と定数に加法・乗法を有限回施して得られる式を多項式, 多項式の商の形を有理式という。多項式であらわされる関数は連続, 有理式であらわされる関数は分母が 0 とならない点で連続である。

微分可能性 例 3.10 の (1) の関数は, 偏微分可能だが連続ではない。そのような関数を微分可能とはいえないだろう。

定義 3.11. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x, y)$ が $(a, b) \in D$ で微分可能であるとは, 定数 A, B をうまくとり, 十分小さい $(h, k) \neq (0, 0)$ に対して

$$(3.3) \quad f(a + h, b + k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

により $\varepsilon(h, k)$ を定義すると, 次が成り立つことである:

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0.$$

命題 3.12. 関数 $f(x, y)$ が (a, b) で微分可能ならば, f は (a, b) で偏微分可能で, (3.3) の定数 A, B は $A = f_x(a, b), B = f_y(a, b)$ でなければならない。

証明. 式 (3.3) の $k = 0$ として

$$\frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = \frac{Ah + \varepsilon(h, 0)\sqrt{h^2}}{h} = A + \varepsilon(h, 0)\frac{|h|}{h}$$

だが, $|\varepsilon(h, 0)| \leq \varepsilon(h, 0)\frac{|h|}{h} \leq |\varepsilon(h, 0)|$, かつ $h \rightarrow 0$ とすると $\varepsilon(h, 0) \rightarrow 0$ だから

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = f_x(a, b).$$

一方 $h = 0$ とすることで $B = f_y(a, b)$ も得られる。□

したがって定義 3.11 は次と同値である:

定理 3.13. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x, y)$ が $(a, b) \in D$ で微分可能であるための必要十分条件は, f が (a, b) で偏微分可能で,

$$(3.4) \quad \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$$

$$\left(\varepsilon(h, k) := \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right)$$

が成り立つことである。

命題 3.14. 関数 f が (a, b) で微分可能ならば (a, b) で連続である。

証明. 式 (3.3) の両辺で $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ とすればよい。□

注意 3.15. 命題 3.12 の逆は成立しない。実際, 例 3.8 (1) の f は $(0, 0)$ で偏微分可能だが連続でない (例 3.10 参照)。したがって, 命題 3.14 の対偶から微分可能でない。

微分可能性の十分条件

定理 3.16. 領域 D で定義された 2 変数関数 f が D の各点で偏微分可能, かつ偏導関数 f_x, f_y が D で連続ならば f は D の各点で微分可能である。

証明には平均値の定理を用いる。節末 (35 ページ) 参照。

例 3.17. 定理 3.16 の逆は成立しない . 実際 ,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

は $(0, 0)$ で微分可能であるが f_x, f_y は原点で連続でない . \diamond

偏微分の順序交換定理

定理 3.18. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f の 2 つの 2 次偏導関数 f_{xy}, f_{yx} が存在してともに連続であるとき, $f_{xy} = f_{yx}$ が成立する .

C^k -級関数 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f が D で

- C^0 -級とは D で連続なこと ,
- C^1 -級とは D の各点で偏微分可能で , f_x, f_y が D で連続となること ,
- C^2 -級であるとは , f の 2 次偏導関数 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ が存在して , それらがすべて D で連続であること ,
- C^k -級 (k は正の整数) とは f の k 次偏導関数が存在し , それらがすべて D 上で連続となること ,
- C^∞ -級とは , 非負整数 k に対して C^k -級となることである .

系 3.19. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 f が

- (1) 微分可能ならば C^0 -級である (命題 3.14) .
- (2) C^1 -級ならば微分可能である (定理 3.16) .
- (3) $k \leq m$ のとき C^m -級ならば C^k -級である .
- (4) C^2 -級ならば $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つ (定理 3.18) .

3.3 全微分と近似式

関数 $f(x, y)$ が定義域の点 $P = (a, b)$ で微分可能であるとき ,

$$(3.5) \quad (df)_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

で与えられる 2 次行ベクトル $(df)_P$ を関数 f の点 P における全微分または微分という¹⁰⁾ . さらに , (x, y) に対して 2 次行ベクトル $(f_x(x, y), f_y(x, y))$ を対応させる規則 df を f の全微分または微分という :

$$(3.6) \quad df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

例 3.20. 関数 $\varphi(x, y) = x, \psi(x, y) = y$ に対して $d\varphi = (1, 0), d\psi = (0, 1)$ である . このことを次のように書く : $dx = (1, 0), dy = (0, 1)$. \diamond

例 3.20 の記号を用いれば (3.6) は

$$(3.7) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

と書くことができる . これが通常的全微分の表し方である .

例 3.21. 微分可能性の定義式 (3.3) の最後の項は , (h, k) と $(0, 0)$ の距離 $\sqrt{h^2 + k^2}$ が十分小さいときに , それにくらべてずっと小さくなるので , (h, k) を $(\Delta x, \Delta y)$ と書けば , これが $(0, 0)$ に十分に近いときは , 近似式

$$(3.8) \quad \Delta f \doteq \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y, \\ (\Delta f := f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b))$$

が成り立つ . ただし \doteq はおよそ等しいことを表す . この近似式の誤差を評価するには , 微分積分学第二で学ぶテイラーの定理を用いる . \diamond

曲線に沿う微分 数直線上の区間 I 上で定義された 1 変数関数 $x(t), y(t)$ の組 $(x(t), y(t))$ は I から座標平面 \mathbb{R}^2 への写像と思える :

$$\gamma: I \ni t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

このような写像を曲線あるいは曲線のパラメータ表示 という¹¹⁾ . 以下 , 曲線と言えは $x(t), y(t)$ が微分可能となるもののみを考える¹²⁾ . このことを “ γ

¹⁰⁾ 数を 2 つ横に並べたものを 2 次行ベクトルという . これは $(1, 2)$ -型の行列とみなすことができる . 行列とベクトルの演算については第 4 回参照 . ; 行ベクトル : a row vector 列ベクトル : a column vector; 全微分 : a total differential; 微分 : a differential.

¹¹⁾ 曲線 : a curve; 曲線のパラメータ表示 : a parametric representation of the curve.

¹²⁾ だからといって γ の像が “なめらか” な図形になるとは限らない . たとえば曲線 $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ はサイクロイド (cycloid) を与える . このパラメータ表示の 2 つの成分はともに微分可能 (さらに C^∞ -級) であるが , $t = 2n\pi$ に対応する点 $(2n\pi, 0)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) で尖った形をしている .

は微分可能” という．微分可能な曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ に対して

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t) \right)$$

を曲線上の点 $(x(t), y(t))$ における速度ベクトルという¹³⁾．パラメータ t の値を時刻とみなし， $\gamma(t)$ を時刻 t における点の位置とみなすことによって，曲線 $\gamma(t)$ は平面上の点の運動を表していると考えられる．このとき，速度ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ は時刻 t における運動する点の速度とみなすことができる．

例 3.22. (1) ベクトル $v = (v_1, v_2)$ と点 $P = (a, b)$ に対して

$$\gamma(t) = (a + tv_1, b + tv_2)$$

は $t = 0$ で点 P を通り一定の速度 v で直線上を運動する点，すなわち P を通り v に平行な直線を表す (図 3.2 左)．

(2) パラメータ s に対して $\sigma(s) = (\cos s, \sin s)$ ($-\pi < s < \pi$) は原点を中心とする半径 1 の円から $(-1, 0)$ を除いた部分を表す¹⁴⁾．速度ベクトルは $(-\sin s, \cos s)$ となるから，速さは 1 で一定である (図 3.2 中央)．

(3) 次も原点を中心とする半径 1 の円から $(-1, 0)$ を除いた図形を表す：

$$\tilde{\sigma}(t) := \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \quad (-\infty < t < \infty).$$

この式で $t = \tan \frac{s}{2}$ とすると，(2) の表示が得られる (図 3.2 右)．◇

2 変数関数 $f(x, y)$ と曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ に対して，

$$(3.9) \quad F(t) = f(x(t), y(t)).$$

は，1 変数関数を与える．

命題 3.23. 微分可能な 2 変数関数 $f(x, y)$ と微分可能な曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ に対して，(3.9) は 1 変数関数として微分可能で，次が成り立つ：

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t).$$

証明．実数 t を一つ固定して， δ の 1 変数関数 $h(\delta), k(\delta)$ をそれぞれ

$$h(\delta) := x(t + \delta) - x(t), \quad k(\delta) := y(t + \delta) - y(t)$$

¹³⁾速度ベクトル：the velocity vector; 速さ：the speed. 違いを思い出しておこう．

¹⁴⁾直線：a line; 円：a circle.

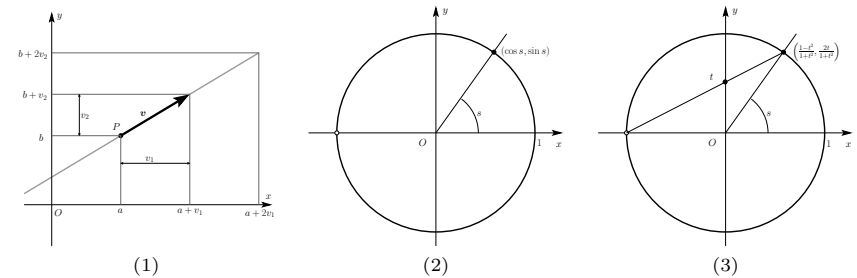


図 3.2 例 3.22

とすると， x, y の連続性から $\delta \rightarrow 0$ のとき $h(\delta), k(\delta) \rightarrow 0$ ．さらに

$$\varepsilon_1(\delta) := \frac{x(t + \delta) - x(t)}{\delta} - \dot{x}(t) = \frac{h(\delta)}{\delta} - \dot{x}(t), \quad \varepsilon_2(\delta) := \frac{k(\delta)}{\delta} - \dot{y}(t)$$

とおけば， $x(t), y(t)$ の微分可能性より $\delta \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon_1(\delta), \varepsilon_2(\delta) \rightarrow 0$ ．これらの記号を用いると， f の微分可能性から

$$\begin{aligned} F(t + \delta) - F(t) &= f(x(t + \delta), y(t + \delta)) - f(x(t), y(t)) \\ &= f(x(t) + h(\delta), y(t) + k(\delta)) - f(x(t), y(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))h(\delta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))k(\delta) + \varepsilon(h(\delta), k(\delta))\sqrt{h(\delta)^2 + k(\delta)^2} \end{aligned}$$

となる．ただし $\varepsilon(h, k)$ は $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ のときに 0 に近づく関数である．したがって，

$$\begin{aligned} \frac{F(t + \delta) - F(t)}{\delta} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))(\dot{x}(t) + \varepsilon_1(\delta)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))(\dot{y}(t) + \varepsilon_2(\delta)) \\ &\quad + \varepsilon(h(\delta), k(\delta)) \frac{|\delta|}{\delta} \sqrt{(\dot{x}(t) + \varepsilon_1(\delta))^2 + (\dot{y}(t) + \varepsilon_2(\delta))^2}. \end{aligned}$$

ここで $\delta \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon_j(\delta) \rightarrow 0$, ($j = 1, 2$)，また $(h(\delta), k(\delta)) \rightarrow (0, 0)$ なので $\varepsilon(h(\delta), k(\delta)) \rightarrow 0$ ．さらに $|\delta|/|\delta| = 1$ であることに注意すると

$$F'(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(t + \delta) - F(t)}{\delta} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\dot{y}(t) \quad \square$$

領域

この節の冒頭で“領域”のいい加減な定義を与えた．整合性のため，ここで領域の定義を与えるが，当面はあまり気にしなくてよい．

定義. 閉区間 $I = [a, b]$ 上の 2 つの連続関数 x, y の組 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ($a \leq t \leq b$) を座標平面 \mathbb{R}^2 の連続な道, 点 $\gamma(a), \gamma(b)$ をそれぞれ γ の始点, 終点とよぶ.

定義. 座標平面 \mathbb{R}^2 の部分集合 D が連結であるとは, D の各点 P, Q に対して P を始点, Q を終点とする連続な道 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ で各 $\gamma(t)$ ($a \leq t \leq b$) が D の点となるものが存在することをである. (この概念は正確には“弧状連結性”という).

定義. 座標平面 \mathbb{R}^2 の点 $P = (a, b)$ と正の実数 ε に対して

$$U_\varepsilon(P) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 < \varepsilon^2\} \subset \mathbb{R}^2$$

で与えられる \mathbb{R}^2 の部分集合を“点 P を中心とした半径 ε の円板”という.

定義. 座標平面 \mathbb{R}^2 の部分集合 D が開集合¹⁵⁾であるとは D の各点 P に対して $U_\varepsilon(P) \subset D$ となるような正の数 ε をとることができることである.

ここでは証明を与えないが, 次の事実は重要である:

事実. 連続関数 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) > 0\}$ は \mathbb{R}^2 の開集合である.

定義. 座標平面 \mathbb{R}^2 の連結かつ開集合となる部分集合を領域という.

定理 3.16・定理 3.18 の証明

これらの定理を証明するためには, 高等学校で学んだ平均値の定理¹⁶⁾を用いる:

定理 (平均値の定理). 関数 f が区間 I で微分可能であるとき, 点 $a \in I$ と $a + h \in I$ となるような h に対して, 次をみたす θ が存在する:

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h \quad (0 < \theta < 1).$$

定理 3.16 の証明. 点 $(a, b) \in D$ で微分可能であることを示す: 0 に近い h, k に対して (3.4) のように $\varepsilon(h, k)$ を定め, これが 0 に近づくことを示す. いま, k を一つ固定して $F(h) := f(a + h, b + k) - f(a, b + k)$ とおくと, f の偏微分可能性から F は h の微分可能な関数で $F'(h) = f_x(a + h, b + k)$, $F(0) = 0$ が成り立つ. そこで F に平均値の定理を適用すると

$$F(h) = F(h) - F(0) = F'(\theta h)h = f_x(a + \theta h, b + k)h \quad (0 < \theta < 1)$$

をみたす θ が存在する. 同様に $G(k) = f(a, b + k) - f(a, b)$ とおくと, k ごとに

$$G(k) = G'(\delta k)k = f_y(a, b + \delta k)k \quad (0 < \delta < 1)$$

をみたす δ をとることができる. したがって

$$\varepsilon(h, k) = \frac{F(h) + G(k) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

¹⁵⁾開集合: an open set; 連結集合: a connected set; 円板: a disc (disk).

¹⁶⁾平均値の定理: the mean value theorem. 証明は後期の微分積分学第二で与える.

$$= (f_x(a + \theta h, b + k) - f_x(a, b)) \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + (f_y(a, b + \delta k) - f_y(a, b)) \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

となるが, $|\theta h| < |h|$, $|\delta k| < |k|$ と, $|h/\sqrt{h^2 + k^2}| \leq 1$, $|k/\sqrt{h^2 + k^2}| \leq 1$ から, 右辺は $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ のときに 0 に近づく. \square

定理 3.18 の証明. 点 $(a, b) \in D$ を固定して $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ を示す. いま,

$$V = V(h, k) := \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b + k) - f(a + h, b) + f(a, b)}{hk}$$

とおく. ただし, h, k は十分 0 に近い数とする. このとき

$$V = \frac{1}{k} \frac{F(h) - F(0)}{h} \quad (F(t) := f(a + t, b + k) - f(a + t, b))$$

だが, $F'(t) = f_x(a + t, b + k) - f_x(a + t, b)$ に注意して平均値の定理を適用すれば,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{k} F'(\theta_1 h) = \frac{1}{k} (f_x(a + \theta_1 h, b + k) - f_x(a + \theta_1 h, b)) \\ &= \frac{1}{k} (F_1(k) - F_1(0)) \quad (F_1(t) := f_x(a + \theta_1 h, b + t)) \end{aligned}$$

となる $\theta_1 \in (0, 1)$ が存在する. さらに $F_1'(t) = f_{xy}(a + \theta_1 h, b + t)$ に注意すれば, 平均値の定理から次を満たす θ_1, θ_2 が存在することがわかる:

$$(*) \quad V = f_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) \quad (\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)).$$

同様に $V = (G(k) - G(0))/(hk)$ ($G(t) := f(a + h, b + t) - f(a, b + t)$) とすると

$$(**) \quad V = f_{yx}(a + \varphi_1 h, b + \varphi_2 k) \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in (0, 1))$$

となる φ_1, φ_2 が存在する. f_{xy}, f_{yx} の連続性から $(*)$, $(**)$ の $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ とする極限をとれば, $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ が成り立つことがわかる. \square

問 題 3

3-1 例 3.4, 3.8, 3.10, 3.17 を確かめなさい.

3-2 2変数関数が連続であること, 偏微分可能であること, 微分可能であること, C^1 -級であることの間を整理しなさい.

例: 微分可能 \Rightarrow 連続; 連続 $\not\Rightarrow$ 微分可能. 実際 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ は $(0, 0)$ で連続だが微分可能でない.

3-3 関数 $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$ に対して $f(0.1, 0.2)$ の近似値を式 (3.8) を用いて求めなさい. また, 計算機などで求めた値とどれくらい近いかわけなさい.

3-4 2変数関数 f が“標高を表すスカラ場”(例 2.2), 曲線 $\gamma(t)$ が, 時刻 t とともに移動する人の運動と思うとき, 式 (3.9) で表される 1変数関数はどのようなものか, 説明しなさい.